数学を味わう
-高校数学から現代解析学へ-

倉田和浩

平成 20 年 6 月 21 日

はじめに: これは, 平成 20 年 5 月 24 日 (土）から 6 月 21 日 (土）にかけての４回にわたって, 首都大学東京オープンユニバーシティの講座として「数学を味わう-高校数学から現代解析学へ-」というタイトルで行った講義録です. もう少し詳しく書くつもりといっておきながら, ここまでとなってしまいましたこと申し訳ございません. 不十分なものながら, 受講者の皆様のお役に立てれば幸いです. もちろん, この期間が過ぎましてもご質問等ございましたら, ご遠慮なくご連絡くださいますようお願いいたします.

このような機会を与えていただくとともに, お世話になりました関係者の皆様と参加していただいた受講者の皆様に深く感謝申し上げます.

平成 20 年 6 月 21 日

首都大学東京・理工学研究科・数理情報科学専攻

倉田　和浩

kurata@tmu.ac.jp

目次

第1章　部分積分の公式、グリーンの定理、ガウスの定理、超関数へ

◆今回は, 微分積分で大切な部分積分の公式の現代解析学への広がりを味わいたいと思います. 微分法で大切な関数のテーラー展開も部分積分の公式から自然に導かれます. 空間多次元での部分積分の公式としてグリーンの定理やガウスの定理へと発展し, それらをもとに, 関数の微分の概念を一般化した超関数の世界を覗きます. その世界ではどんなギザギザなグラフをもつ関数でも'微分'できてしまいます.
□文献ガイド：微分積分学の本はたくさんありますが, 例えば手元に *[笠原]* あるいは *[ハイラー]* あたりを置かれて, 必要に応じて復習・参照されるとよいかと思います. *[笠原]* は微分積分学の標準的でもあり, 一方でより進んだ話題まで書いてある優れたテキストだと思います. 時折, *[薩摩]* や *[溝畑]* などの読み物風の本で概観されてはいかがでしょうか?

1.1　微積分の基本公式と部分積分の公式

微分法とは, 関数 $y = f(x)$ が与えられたとき, 関数 $f(x)$ の変化の様子を解析する手法です. 特に, a での微分係数 $f'(a)$ は xy-平面上でグラフ $y = f(x)$ を書いたとき, グラフ上の点 $(a, f(a))$ での接線の傾きを表します:

$$\frac{df}{dx}(a) = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} (= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}).$$

$f'(x)$ を $f(x)$ の導関数といいます. 厳密には, 上の極限値が存在するとき, $f(x)$ は $x = a$ で微分可能であるといいます.

さらに, 接線の傾きの変化の様子を見ることで関数 $f(x)$ のグラフの曲がり具合を表すことができます. すなわち, 導関数の変化の具合を表す,

２次の導関数 $\frac{d^2f}{dx^2} = f''(x) = (f')'(x)$ を計算することが有効です． さらに３次導関数 $\frac{d^3f}{dx^3} = f'''(x) = (f'')'(x)$ も考えることができ, 帰納的に n 次導関数 ($\frac{d^nf}{dx^n} = f^{(n)}(x)$ と書きます) を考えることができ, 関数 $f(x)$ のより詳しい変化の様子を調べることができます.

ただし, 与えられた関数 $f(x)$ で導関数を持たないものも存在します. $f(x) = |x|$ という関数は, $x \neq 0$ では微分係数 $f'(x)$ を持ちますが, $f'(0)$ は存在しません. $x = 0$ では接線は引けないということを表します. この関数はたった1点でのみ微分可能でないという例ですが, **連続関数ではあるがいたるところで微分可能でないような関数** $f(x)$ **が存在すること**が知られています.

一方で, 積分法とは関数 $f(x)$ に対して対応する図形の面積を計算する方法です. たとえば, $f(x) \geq 0$ として, xy-平面における２次元図形

$$D = \{(x, y)\ ;\ a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

の面積は, a **から** b **までの** $f(x)$ **の定積分**:

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

で計算できます. この量は, 連続関数 $f(x)$ に対して, 区間 $[a, b] = \{a \leq x \leq b\}$ を n 等分割して, 近似長方形領域の面積の和 (この近似和のことを**リーマン和**と呼ぶことがあります) で近似して, その極限:

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{n \to +\infty} \sum_{k=1}^{n} f\Big(a + \frac{k}{n}(b-a)\Big)\frac{b-a}{n}$$

として定義されます (この積分のことを**リーマン積分**とも呼び, ２０世紀前半に発展された**ルベーグ積分**と対比されることがあります).

微分係数 $f'(x)$ にも定積分 $\int_a^b f(x)\, dx$ にも, 上のように**極限の概念**によって定義されるものであることに注意しましょう.

◆この意味で**微積分法は, 極限を扱う学問なのです. つまり, いずれも何かの量の極限値を見ることで, 接線の傾きとか面積といった量を我々ははっきり見ているのです.**

定理 1 *(***微積分の基本定理***)* *a を1つ固定する. このとき, 連続関数 $f(x)$ と任意の x に対して次が成り立つ:*

$$\frac{d}{dx}\Big(\int_a^x f(t)\, dt\Big) = f(x).$$

証明:定義によって, 左辺は

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\Big\{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\Big\}$$

を計算することになりますが, 積分と面積との関係から,

$$\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt = \int_x^{x+h} f(t)\,dt$$

となることに注意します. ここで

$$M(h) = \max_{x\le t\le x+h} f(t), \quad m(h) = \min_{x\le t\le x+h} f(t)$$

とおくとき, やはり面積との関係から

$$m(h)h \le \int_x^{x+h} f(t)\,dt \le M(h)h$$

となるので,

$$m(h) \le \frac{1}{h}\Big\{\int_a^{x+h} f(t)\,dt - \int_a^x f(t)\,dt\Big\} \le M(h)$$

となります. ここで $f(x)$ は連続であり, $h\to 0$ の極限で $M(h), m(h)$ ともに $f(x)$ という値に収束することより, 定理の主張が得られるわけです.

これから, 次の公式（これも微分積分学の基本公式と呼ぶことがあります）を得ます.

定理 2 $f(x), f'(x)$ がともに区間 $[a,b]$ で連続関数ならば,

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a).$$

右辺はよく, $[f(x)]_{x=a}^{x=b}$ という記号を用いて表すことが多いです.

証明: $F(x) = \int_a^x f'(t)\,dt$ とおくと, 定理 1 より $F'(x) = f'(x)$ が成り立ちます. すなわち $(F(x) - f(x))' \equiv 0$ となるわけですが, 一般に $G'(x) \equiv 0$ となる関数は定数しかありません. (このことは平均値の定理から出てくることです.) よってある定数 C が存在して $F(x) - f(x) = C$ となりますが, 特に $x = a$ では $F(a) = 0$ となるので $C = -f(a)$ となって

$$\int_a^x f'(t)\,dt = F(x) = f(x) - f(a)$$

が得られたわけです.

これより,

定理 3 *(***部分積分の公式***)* f, f', g, g' がすべて区間 $[a,b]$ 上で連続関数ならば, 次が成り立つ*:*

$$\int_a^b f'(x)g(x) = [f(x)g(x)]_{x=a}^{x=b} - \int_a^b f(x)g'(x)\,dx.$$

証明: 定理 2 を $h(x) = f(x)g(x)$ に対して適用して, **積の微分公式:**

$$h'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$

に注意すれば得られます.

1.2　Taylor 展開

◆ここでは, 微分法の頂点とも言うべき Taylor 展開が部分積分の公式から自然に導かれることを見てみましょう.

関数 $f(x)$ は何回でも微分可能であってその導関数はすべて連続関数であるとしましょう. a を 1 つ固定します. 任意の x に対して, まず微積分の基本公式から

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,dt$$

が成り立ちます. ここで少しトリックを使います (自然に導かれるといいながら）. いま x も止めておいて, $-(x-t)$ という t の関数（t に関する 1 次関数です) を考えると, $\frac{d}{dt}(-(x-t)) = 1$ ですね. すると部分積分の公式が使えて,

$$\int_a^x f'(t)\,dt = \int_a^x f'(t)\frac{d}{dt}(-(x-t))\,dt = [f'(t)(-(x-t))]_{t=a}^{t=x} - \int_a^x f''(t)(-(x-t))\,dt$$

$$= f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt$$

となる. したがって, 左記の式に代入すると

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \int_a^x (x-t)f''(t)\,dt$$

を得たわけです. これは, 関数 $f(x)$ を 1 次関数 $f(a) + f'(a)(x-a)$ と' おつり' との和で表す表現を与えたもので Taylor 展開の 1 つです. ($y = f(a) + f'(a)(x-a)$ は $y = f(x)$ というグラフ上の点 $(a, f(a))$ での接線の方程式であることに注意しましょう!)

一般に**関数** $f(x)$ **の Taylor 展開**とは勝手な自然数 n に対して $f(x)$ を近似する近似 n 次 Taylor 多項式 $f_n(x)$ とおつり（ふつう剰余項といって R_{n+1} などと表します) との和：

$$f(x) = f_n(x) + R_{n+1}$$

という表現のことを言います．近似する多項式 $f_n(x)$ はいい加減に決まるのではなく, $f(x)$ と a から決まるべきものです．

さらに近似 2 次 Taylor 多項式を計算してみましょう．それには, 今度は

$$(x-t) = \frac{d}{dt}(-\frac{(x-t)^2}{2})$$

に注意して,

$$\int_a^x (x-t)f''(t)\,dt = \int_a^x (-\frac{(x-t)^2}{2})' f''(t)\,dt = [-\frac{(x-t)^2}{2}f''(t)]_{t=a}^{t=x} + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f'''(t)\,dt$$

$$= \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f'''(t)\,dt$$

となることを利用して,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{(x-a)^2}{2}f''(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^2}{2}f'''(t)\,dt$$

を得るわけです．つまり近似 2 次多項式 $f_2(x)$ は

$$f_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

です．一般に,

定理 4 *(***Taylor 展開***) $f(x)$ が何回でも微分でき, 導関数がすべて連続関数としたら, 任意の自然数 n に対して次が成り立つ:*

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1},$$

ここで剰余項 R_{n+1} は

$$R_{n+1} = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!}f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

もし $a \in I = [c,d]$ で, $\max_{y\in I} |f^{(n+1)}(y)| \leq M$ が成り立つとしたら,

$$f_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

として, 任意の $x \in I$ に対して,

$$|f(x) - f_n(x)| = |R_{n+1}| \leq M\frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}$$

が成り立つことになります. これより x が a に近いとき, R_{n+1} は $|x-a|^{n+1}$ と同等なくらい微小な量であることを表しています.

◆ $a = 0$ のときの Taylor 展開を特に, **マクローリン展開**といいます：

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,dt.$$

◆さらに,

$$\max_{x\in I} |f(x) - f_n(x)| \leq M\frac{(d-c)^{n+1}}{(n+1)!} \to 0 \ (n \to +\infty)$$

も成り立つこととなり, 十分大きな n に対して, 区間 I 上で $y = f(x)$ のグラフは $y = f_n(x)$ という多項式のグラフと非常に近くなることがわかります.(このことを**近似 n 次 Taylor 多項式はもとの関数 $f(x)$ に区間 I 上で一様収束する**, とも言います.)

◆例:

1. $f(x) = e^x$ は $f'(x) = e^x$ となるので, 一般に $f^{(n)}(x) = e^x$ です. よってマクローリン展開は次のようになる:

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!}e^t\,dt.$$

2. $f(x) = \sin x$ は $f'(x) = \cos x, f''(x) = -\sin x, \cdots$ なので

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots$$

となる. 同様にして

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots$$

となる.

1.3　グリーンの定理, ガウスの定理

◆ここでは, 空間 2 次元での積分, 部分積分の公式がどうなるのかを見ていきましょう. 空間 3 次元以上も同様に積分や, 部分積分の公式が得られることになるが, 空間 2 次元の場合を味わうことで本質的な部分は理解できることになると思われます.　グリーンの定理もガウスの定理の同じ 2 次元の部分積分の公式の表現の仕方が違うだけですが, 用途に応じて使い分けたほうが便利なこともあります. またこれらを理解するには, 曲がった曲線の上での積分である**線積分**の概念も理解する必要が出てきます.

◆ 1680 年頃のニュートンやライプニッツによる微分積分学ができてから, ガウスやグリーンの定理ができたのが 1810-20 年頃らしいですが, 私たちは大学 1 、2 年次あたりでこの 130-40 年くらいのときを一気に駆け抜けることになるのです.

細かい記号や意味はあとで説明しますが, 1 次元の微分積分の基本公式の 2 次元バージョンは次で与えられます.

定理 5 *(2 次元のガウスの定理) なめらかな関数 $f(x, y)$ と, 滑らかな境界をもつ領域 D に対して, 次の公式が成り立つ.*

$$\int\int_D \frac{\partial f}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{\partial D} f n_x\,ds,$$

$$\int\int_D \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy = \int_{\partial D} f n_y\,ds.$$

ここで ∂D は D の境界のなす曲線を表し, $n = (n_x, n_y)$ はその境界 ∂D 上の点における外向き単位法線ベクトルで, その成分をそれぞれ n_x, n_y と表しています.

これからすぐに,

定理 6 *(2 次元の部分積分公式) なめらかな関数 $f(x, y), g(x, y)$ と, 滑らかな境界をもつ領域 D に対して, 次の公式が成り立つ.*

$$\int\int_D \frac{\partial f}{\partial x} g(x, y)\,dx\,dy = \int_{\partial D} f g n_x\,ds - \int\int_D f(x, y)\frac{\partial g}{\partial x}\,dx\,dy,$$

$$\int\int_D \frac{\partial f}{\partial y} g(x, y)\,dx\,dy = \int_{\partial D} f g n_y\,ds - \int\int_D f(x, y)\frac{\partial g}{\partial y}\,dx\,dy.$$

◆記号の意味をまず説明しましょう.

1. **偏微分:**

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x,y)}{h},\quad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x,y+h)-f(x,y)}{h}$$

は偏微分係数です. できた関数を**偏導関数**と呼びます. たとえば, 最初のは y を止めて, x に関しての微分係数を計算することを意味しますので, 偏微分といっても基本的には 1 変数微分をすればいいわけです.

2. **２重積分:** 2 次元領域 D を x,y 方向にそれぞれに分割 (小長方形分割！) して, 1 次元の定積分の定義と同様に小長方形 $s_{i,j}$ 上の点 (x_i,y_j) での値 $f(x_i,y_j)$ に小長方形の面積 $|S_{i,j}|$ をかけてできるリーマン和の分割を細かくしていった極限値で定義される：

$$\int\int_D f(x,y)\,dx\,dy=\lim_{|\Delta|\to 0}\sum f(x_i,y_j)|S_{i,j}|.$$

$|\Delta|\to 0$ で分割の幅 $|\Delta|$ を細かくしていく極限を表しています.

3. **曲線 C に沿った線積分:** 曲線 C をパラメータ表示: $x=x(t), y=y(t), a\le t\le b$, して, 弧長パラメータ $s=s(t)$ を

$$s=s(t)=\int_a^t\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

とすると,

$$\frac{ds(t)}{dt}=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}.$$

このとき C に沿った関数 g の線積分を

$$\int_C g\,ds=\int_a^b g(x(t),y(t))\frac{ds(t)}{dt}\,dt=\int_a^b g(x(t),y(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}\,dt$$

で定めます. このときベクトル $\mathbf{t}(t)=(x'(t),y'(t))$ は曲線 C の接ベクトルを表し, 曲線 C の進む方向に対して左側を内部と見ての外向き単位法線ベクトル $\mathbf{n}$ は

$$\mathbf{n}(t)=\frac{(y'(t),-x'(t))}{\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}}$$

となることに注意しましょう.

4. (ほかの線積分の定義など:)

$$\int_C f\,dx=\int_a^b f(x(t),y(t))\frac{dx(t)}{dt}\,dt,\quad \int_C f\,dy=\int_a^b f(x(t),y(t))\frac{dy(t)}{dt}\,dt,$$

と定義すると, 次の関係式が成り立つ:

$$\int_C f n_x\,ds = \int_C f\,dy, \quad \int_C f n_y\,ds = -\int_C f\,dx.$$

◆ガウスの定理の証明:
(step 1) まず, D が長方形領域の場合に確かめましょう.
(step 2) 一般の領域 D の場合には細かく小長方形 (型) 領域に分割にてそれぞれで成り立つ公式を足し合わせると, 線積分の部分が隣り合う辺での線積分が互いにキャンセルすることで証明できることになるのです.

これらよりガウスの定理から次のグリーンの定理が得られます.

定理 7 *(グリーンの定理)* なめらかな関数 $f(x,y), g(x,y)$ と, 滑らかな境界をもつ領域 D に対して, 次の公式が成り立つ.

$$\int\int_D \left(\frac{\partial g}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right) dx\,dy = \int_{\partial D} f\,dx + g\,dy.$$

ただし, 境界曲線 ∂D の向きは D を左側に見ながら進む方向を正の向きとして定めるものとする.

1.4　超関数の世界

□**文献ガイド:**L^p 空間とか関数解析の事項は後でも出てきますが,*[ブレジス]*, *[黒田]* や *[堤]* をそばに置いておいて必要に応じて, 言葉の意味など参照していただくとよいでしょう. 超関数についても, *[堤]* を参照してください. 弱微分やソボレフ空間については *[ブレジス]*, *[黒田]* にも解説されています.

◆ここでは, 通常の意味では微分できない関数も**一般化された意味での微分**という概念を考えて, 何回でも微分できる世界を覗きましょう. いかにして微分の概念を一般化することができるのでしょうか？ここでも部分積分の公式が出発点となります.　1930 年代の Sobolev による**弱微分**の概念の有効性がわかり, **'Dirac のデルタ関数'** が物理で便利なものとして使われる中, 1940 年代に L. Schwartz によって作られたが**超関数の理論**です. そこでは, 関数の値そのものを見るという視点から, 関数 $f(x)$ のいろいろな関数 $\phi(x)$ への作用の仕方を見ることでもとの関数 $f(x)$ の性質を調べるとい視点への移行が必要です. こういう見方で**汎関数**といいます.

たとえば, 関数 $f(x)$ の性質を調べるのに, 別のいろいろな関数 $\phi(x)$ を取ってきて

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx$$

の値の情報を利用するという考え方です. もちろん正確な $f(x)$ の情報を得るためにはたくさんの $\phi(x)$ に対して上記の量を計算する必要があります. どれだけたくさんの $\phi(x)$ を考えて $\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx$ を計算すればいいのでしょうか？

いま, $y \in \mathbf{R}, \epsilon > 0$ に対して, 関数 $\phi_{y,\epsilon}(x)$ を次のように定義します.

$$\phi_{y,\epsilon}(x) = \frac{1}{2\epsilon}, \quad (|x-y| \le \epsilon),$$

で, そのほかの x では $\phi_{y,\epsilon}(x) = 0$ とします. このとき,

$$\int_a^b f(x)\phi_{y,\epsilon}(x)\,dx = \frac{1}{2\epsilon}\int_{y-\epsilon}^{y+\epsilon} f(x) \to f(y)\ (\epsilon \to 0)$$

となります. つまり y での値 $f(y)$ が $\phi_{y,\epsilon}(x)$ への作用によってだいたい復元できているわけです.

◆**試験関数**：たくさんの $\phi(x)$ に対しての作用を見たいのですが, どれくらいたくさんであるといいかの 1 つの集合として次を考えます.

$$C_0^\infty(a,b) = \{f \in C^\infty(a,b)\,;\, f \text{ の台は } (a,b) \text{ 内のある有界閉区間にすっぽり含まれる}\}$$

とおき, $f \in C_0^\infty(a,b)$ を試験関数といいます. ここで f **の台**とは $\{x \in (a,b)\,;\, f(x) \neq 0\}$ の閉包のことで, つまり試験関数 $f(x)$ は無限回微分可能であって, 境界 $x = a, x = b$ の近くではべったり 0 となるような関数です.

◆連続関数 $f(x)$ に対して, 各試験関数 ϕ への作用を

$$\int_a^b f(x)\phi(x)\,dx, \quad (\phi \in C_0^\infty(a,b))$$

で定める. 関数 ϕ ごとに右辺で定義された実数を対応させるので, 汎関数と呼ぶ. この汎関数を改めて

$$\langle T, \phi\rangle = \int_a^b f(x)\phi(x)\,dx\ (\phi \in C_0^\infty(a,b))$$

と書こう. この汎関数 T は f から決まるので $T = T_f$ とも書きます.　明らかに, この汎関数は**線形性**を持ちます:

$$\langle T, \alpha\phi_1 + \beta\phi_2\rangle = \alpha\langle T, \phi_1\rangle + \beta\langle T, \phi_2\rangle, \quad (\alpha, \beta \in \mathbf{R}, \phi_1, \phi_2 \in C_0^\infty(a,b)).$$

こうした線形性をもつ汎関数を**線形汎関数**といいます.

また(唐突ではありますが)次の意味での**連続性**をもつことがわかります. $\phi_n \to \phi\ (n \to +\infty)$ in $C_0^\infty(a,b)$ ならば $\langle T, \phi_n \rangle \to \langle T, \phi \rangle\ (n \to +\infty)$. ここで **$C_0^\infty(a,b)$ での収束**: $\phi_n \to \phi\ (n \to +\infty)$ in $C_0^\infty(a,b)$ とは, ある一定の有界閉区間 $K \subset (a,b)$ があって, ϕ_n の台はすべて K に含まれていて任意の自然数 k に対して

$$\max_{x \in K} |\frac{d^k \phi_n(x)}{dx^k} - \frac{d^k \phi(x)}{dx^k}| \to 0\ (n \to +\infty)$$

が成り立つことをいう.

◆**超関数の定義:** $C_0^\infty(a,b)$ 上の線形汎関数 T で, $C_0^\infty(a,b)$ の上で連続性を持つもの全体の集合を $\mathcal{D}'(a,b)$ で表します. $T \in \mathcal{D}'(a,b)$ を (a,b) 上の超関数と呼びます.

◆例:

1. $f \in C(a,b)$ に対して, $T_f \in \mathcal{D}'(a,b)$.

2. $L^1(a,b) = \{f \quad \int_a^b |f(t)|\,dt < +\infty\}$ とおく. なんらかの意味で積分可能な関数（単に, 可積分とも言う）全体のなす集合です. (正確には, ルベーグ可積分な関数全体です.) やはり, $T_f \in \mathcal{D}'(a,b)$ となります. もっと一般に,$L^1_{loc}(a,b) = \{f$ 各有界閉区間 $K \subset (a,b)$ に対して $\int_K |f(t)|\,dt < +\infty\}$ とおく (**局所可積分関数全体のなす集合**といいます）と, やはり, $T_f \in \mathcal{D}'(a,b)$ となります.

3. $c \in (a,b)$ として, $\langle T, \phi \rangle = \phi(c),\ \phi \in C_0^\infty(a,b)$ で定義される汎関数 T も $T \in \mathcal{D}'(a,b)$ となることがわかります. これを Dirac の超関数といって $T = \delta_c$ で表します.

◆超関数 $T \in \mathcal{D}'(a,b)$ の微分の定義: 超関数 $T \in \mathcal{D}'(a,b)$ に対して,

$$\langle S, \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle,\ (\phi \in C_0^\infty(a,b))$$

で汎関数 S を定めると $S \in \mathcal{D}'(a,b)$ となることがわかります. この S を T の**超関数微分**といって $S = T'$ と書きます. したがって,

$$\langle T', \phi \rangle = -\langle T, \phi' \rangle, \quad (\phi \in C_0^\infty(a,b))$$

となります. **この定義は妥当なのでしょうか？**もし $f \in C^1(a,b)$ ならば,

$$\langle T_f, \phi' \rangle = \int_a^n f(x)\phi'(x)\,dx = -\int_a^b f'(x)\phi(x)\,dx = -\langle T_{f'}, \phi \rangle$$

となるので, このことは T_f の超関数微分は $T_{f'}$ であることを意味します. 上の**超関数微分の定義は通常の微分の拡張になっている**といえるわけで

す. ひとたびこの妥当性を認めれば, **超関数は常に微分できることになる**のです.

◆問題-1: 通上の微分の定義を拡張しているとしたら, $T \in \mathcal{D}'(a,b)$ で, $T' = 0$ なるとき, $T = c$(定数) (正確には $T = T_c$) といえるのでしょうか？

◆問題-2:$T \in \mathcal{D}'(\mathbf{R})$ で, $T'' = \delta_0$ なるものを見つけよ.

第2章　解析学の舞台 ⋯ 関数の近似, 関数空間

◆今回は, 現代解析学の舞台とも言うべき**関数空間**について話をしましょう. 現代解析学において微分方程式（や積分方程式）の求めたい解をどの関数空間の中にで探すのかを意識することが大切です. こういう考え方は20世紀初頭にようやく組織的に意識されるようになったものです. そこには, 2つの関数が近いかどうかをはかる**位相（特に距離）**をどうとるかが重要になります. また**一般的な関数（悪い振る舞いをする関数）を性質のよい関数で近似する**という考え方が重要にもなってきます. 19世紀初頭にフーリエによって提唱され生まれたフーリエ級数展開の理論は画期的なもので, 無限級数の収束理論, ヒルベルト空間論やスペクトル理論など, 与えた影響力は大きい. 今なお, フーリエ変換とともにフーリエ解析の名の下に不可欠かつ強力な解析の武器となっている.
できるだけ歴史的コメントもしますが, 厳密な数学史を意図しているわけではなく, 現代解析学に生きているさまざまな概念や理論は生まれた姿や状況を感じ取ることでより味わう深くなると思うからです.
□文献ガイド:フーリエ級数・フーリエ変換については, *[*州之内*]*,*[*堤*]*, *[*神保*]*, *[*金谷*]* などを参照ください. *[*金谷*]* は一風変わった形式で対話式に説明が書かれていたりして, また工学的な応用にも触れており興味深い本です. *[*キーナー*]* も味のあるいい本です. もしどっぷりフーリエ解析の世界を覗いてみたい方は, *[*猪狩*]* に挑戦されてはいかがでしょうか？きっとフーリエ解析の数学的深みを感じられることと思います.　フーリエ解析はその応用の幅広さでも重要ですが, 純粋数学の香りが漂い, 小気味よい議論の運びに身の引き締まる思いと感動を味わいながら, 知らず知らず引きこまれてしまう魅力があるように思います. フーリエ解析の洋書にも名著は多いです.

2.1　関数を近似する

◆なめらかな関数 $f(x)$ を**多項式というよい関数で近似する**のが, テーラー展開（あるいはマクローリン展開）でした. ところが, 例えば $x > 0$ では $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ で, $x \leq 0$ では $f(x) = 0$ であるような関数を考えると, この $f(x)$ は $x = 0$ を含めていたるところで何回でも微分可能な関数ですが, すべての n に対して $f^{(n)}(0) = 0$ であることがわかります. よって, （有限）マクローリン展開より, 近似テーラー多項式は常に 0 となってします:

$$f(x) = f(0)+f'(0)x+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1} = \frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{(n+1)!}x^{n+1}.$$

つまり, この関数 $f(x)$ の $x = 0$ の近くで近似できているとはいえないことになってしまいます.

◆べき級数：

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} a_nx^n (= \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N} a_nx^n)$$

とかける関数を**解析関数**と呼びます. このような関数には収束半径という概念が大切で, $|x| < R$ なる任意の x に対して上の無限級数は収束し, $|x| > R$ なる任意の x に対しては収束しない, という実数 $R > 0$ があるとき**収束半径は** R **である**といいます. このとき $|x| < R$ では無限回微分可能（項別微分可能）であり, $a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ となります:

$$f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots.$$

最初に挙げた関数 $f(x)$ は解析関数ではなかったわけです.

◆ 1750 年にベルヌイ (D. Bernoulli) は（ギターの）弦の振動などの波動現象を記述する**波動方程式の初期値・境界値問題**:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in (0,L)\times(0,+\infty),$$

$$u(x,0) = a(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = b(x),\ x \in [0,L],$$

$$u(0,t = u(L,t) = 0,\ t \in [0,+\infty)$$

の解を**変数分離の方法** (まずは $u(x,t) = U(t)X(x)$ の形の解を求め, その線形結合で解を表現しようというもの）ので解くことを試みた際,

$$a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(\frac{n\pi}{L}x), \quad b(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} c\frac{n\pi}{L}b_n \sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

を満たすような $\{a_n\}, \{b_n\}$ を取れればよいことには気付いた. このとき解 $u(x,t)$ は

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{+\infty}(a_n \cos(c\frac{n\pi}{L}t) + b_n \sin(c\frac{n\pi}{L}t))\sin(\frac{n\pi}{L}x)$$

となります. しかしながら, 当時はこのような $\{sin(\frac{n\pi}{L}x)\}_{n=1}^{+\infty}$ のようないい関数の和で表されるような関数 $a(x), b(x)$ は解析関数とか非常になめらかで限られた関数だけだとオイラーをはじめ多くの人が思っていたようです.

◆任意の関数 f, g に対して, $u(x,t) = f(x-ct) + g(x+ct)$ は, 波動方程式の解となっていることに注意しましょう. 例えば $f(x-ct)$ という解は $t=0$ で $f(x)$ という形をした波が, 同じ波形をもったまま単位時間に**速度 c で右に進む進行波解**と呼ばれるものです. 一方, 上の解の表現に出てくる, 例えば $v(x,t) = \sin(c\frac{n\pi}{L}t)\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ で表される解は**定在波** (空間的には $\sin(\frac{n\pi}{L}x)$ という一定のパターンを持ちながら, 時間周期的に振動する波）と呼ばれるものです. これはまた, 左右の進行波の重ね合わせとして,

$$v(x,t) = -\frac{1}{2}(\cos(\frac{n\pi}{L}(ct+x)) - \cos(\frac{n\pi}{L}(ct-x)))$$

ともかけることにも注意しましょう.

2.2 フーリエ級数展開

◆ 1811 年に, フーリエ (J. Fourier) は熱伝導現象を記述する数理モデルとしての熱方程式を導出し, その初期値・境界値問題:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}, \quad (x,t) \in (0,1) \times (0,+\infty),$$
$$u(x,0) = a(x), \quad x \in [0,1],$$
$$u(0,t) = u(1,t) = 0,\ t \in [0,+\infty)$$

の解を**変数分離の方法**を用い,

$$a_n = 2\int_0^1 f(x)\sin(n\pi x)\,dx,\ n \geq 1$$

として,

$$a(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n \sin(n\pi x),\ x \in [0,1]$$

が（解析関数でなくても）一般的な関数 $a(x)$ に対して成立することを主張したのです. 厳密にその収束を証明したのは, ディリクレ (Dirichlet) で 1829 年のことです. このとき解は

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty} a_n e^{-n^2\pi^2 t}\sin(n\pi x)$$

と表現できることになります.

定理 8 $f(x)$ が $[0,2\pi]$ 上で周期 2π の関数で区分的に C^1 級の関数とするとき, 任意の $x\in[2\pi]$ に対して,

$$\frac{1}{2}(f(x+0)+f(x-0))=\sum_{n=0}^{+\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))$$

が成り立つ（各点収束です）. ここで,

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos(nx)\,dx,\quad b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin(nx)\,dx$$

は $f(x)$ の**フーリエ係数**と呼ばれるものです.

さらに $f(x)$ が連続ならば,

$$\max_{0\le x\le 2\pi}\left|f(x)-\sum_{n=0}^{N}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx))\right|\to 0\ (N\to+\infty)$$

が成り立つ（つまり, 一様収束する）.

例. $f(x)=\frac{(\pi-x)^2}{4},\ (0\le x\le 2\pi)$ なる周期 2π の関数とするとき,

$$f(x)=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}\cos(nx)$$

が得られます. ここで特に $x=0$ とすることで,

$$\frac{\pi^2}{4}=f(0)=\frac{\pi^2}{12}+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}$$

となり, よって

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$$

が得られます. これも**オイラーの公式**として有名なものです.

◆正規直交系: 関数の列 $\{\phi_n\}$ があって,

$$(\phi_n, \phi_m)_{L^2(0,2\pi)} \equiv \int_0^{2\pi} \phi_n(x)\overline{\phi_m(x)}\,dx = \delta_{nm}$$

なるとき, $\{\phi_n\}$ は内積 $(\cdot,\cdot)_{L^2(0,2\pi)}$ に関して**正規直交系をなす**といいます. ここで $\overline{\phi(x)}$ は複素関数とした場合の複素共役をとることを表します. 関数列

$$\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(2x), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(2x), \cdots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(nx), \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(nx), \cdots\}$$

を適当に番号つけたものを $\{\phi_m\}$ とするとき, $\{\phi_m\}$ は正規直交系をなすことがわかります. このことから, **ベッセルの不等式**:

$$\|f\|^2_{L^2(0,2\pi)} = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2\,dx \geq 2\pi a_0^2 + \pi\sum_{n=1}^{+\infty}(|a_n|^2 + |b_n|^2)$$

が成り立つことがわかります（後で実は, 等号（**パーセバルの等式**という）が成立することがわかります).
注意: このベッセルの不等式は, ひとたび $\{\phi_n\}$ という正規直交系があるとき, 一般化フーリエ係数 $(\phi_n, f)_{L^2(a,b)}$ に関して, **一般のベッセル不等式**:

$$\|f\|^2_{L^2(a,b)} \geq \sum_{n=1}^{+\infty} |(\phi_n, f)_{L^2(a,b)}|^2$$

が成り立つという一般的構造で理解したほうがいいです. 上記の古典的なベッセル不等式では, 正規化するにあたっての定数分だけ調整しているのに過ぎないのです.
◆ L^2 収束: 実は, さらに

定理 9 *(フィッシャー・リースの定理, 1907年)*
$\|f\|_{L^2} < +\infty$ ならば,

$$\|f - \sum_{n=0}^{N}(a_n\cos(nx) + b_n\sin(nx))\|_{L^2(0,2\pi)} \to 0 \ (N \to +\infty)$$

が成り立つ.

◆ 1902 年にルベーグによる**ルベーグ積分論**でき, 1904 年にフレッシェによって, **距離空間**の概念の整備などがあって, ようやく $f \in L^2(0,2\pi) = \{f(x) : \int_0^{2\pi} |f(x)|\ 2\,dx < +\infty\}$ に対するフーリエ級数の L^2-収束が得られ

たというわけです. $[0,2\pi]$ 上の連続関数全体からなる集合 $C[0,2\pi]$ などもフレッシェによってはじめて一般的に取り扱われたということは興味深い.　$L^2(0,2\pi)$ は L^2-内積:

$$(f,g)_{L^2(0,2\pi)} = \int_0^{2\pi} f(x)\overline{g(x)}\,dx$$

を備えた完備なノルム空間, すなわち**ヒルベルト空間**の構造をもっています.　ちなみに, $X = C[0,2\pi]$ という関数空間には

$$\|f\|_{max} = \max_{0\le x\le 2\pi} |f(x)|$$

というノルムで完備な空間（バナッハ空間）となりますが, この空間はヒルベルト空間の構造は持ちえません. $X = C[0,2\pi]$ における 2 つの関数 f,g の距離は $d(f,g) = \|f-g\|_{max}$ で測ることとなります.
◆ 1910-20 年代はヒルベルト空間におけるスペクトル理論が展開され, 1920 年から 1930 年にかけてはバナッハ空間の整備を始め,Schauder の不動点定理などへの発展があった. ポーランド学派が活躍した時代です. [志賀] に詳しくこのあたりのドラマが書かれています. あまりにも強烈な個性をもったポーランド学派の面々の数学に押しつぶされないように気を確かに持って気楽に眺めてみてはいかがでしょうか？

2.3　複素数とオイラーの公式, コーシーの定理

◆複素数の利用 : 複素数を利用すると, 公式などがとても統一的に扱えるので便利なのです.　また, **複素関数論**という微分積分学のもう 1 つの一般化へと続きます. 複素関数論についてはやはり山のように教科書・専門書がありますが, とりあえず例えば [今吉] を参照ください. 私が以前, 大学 2 年生相手の講義でこの本を教科書に使いました.
オイラーの公式: 実数 x に対して,

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

これは定義だと思ってもよいです. 一般に複素数 $z = x+iy, x,y \in \mathbf{R}$ に対して

$$e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y).$$

これは

$$e^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$$

で定義する立場をとると, 上の公式が成り立つことを証明することができることとなります. 例えば, $\cos y, \sin y$ のマクローリン展開より,

$$e^{iy} = 1+(iy)+\frac{(iy)^2}{2!}+\frac{(iy)^3}{3!}+\frac{(iy)^4}{4!}+\cdots = 1-\frac{y^2}{2!}+\frac{y^4}{4!}+\cdots+i\{y-\frac{y^3}{3!}+\cdots\}$$
$$= \cos y + i\sin y$$

を得ます. また $y \in \mathbf{R}$ に対して

$$\cos y = \frac{1}{2}(e^{iy}+e^{-iy}), \quad \sin y = \frac{1}{2i}(e^{iy}-e^{-iy})$$

も便利です.

◆ $\alpha = p+iq \in \mathbf{C}, x \in \mathbf{R}$ としたとき,

$$\frac{d}{dx}(e^{\alpha x}) = \frac{d}{dx}(e^{px}(\cos(qx)+i\sin(qx))) = \alpha e^{\alpha x}$$

が成り立つことがわかります. これはとても便利で, $\alpha \neq 0$ ならば

$$\int_a^b e^{\alpha x}\,dx = [\frac{e^{\alpha x}}{\alpha}]_{x=a}^{x=b} = \frac{(e^{a\alpha}-e^{b\alpha})}{\alpha}$$

となります.

◆フーリエ級数展開（複素関数版）: 複素数値関数 $f(x)$ に対して

$$\|f - \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{inx}\|_{L^2(0,2\pi)} \to 0 \ (N \to +\infty),$$

ここで

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}\,dx.$$

$\phi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{inx}$ とおくとき, $\{\phi_n(x)\}_{n=-\infty}^{+\infty}$ は正規直交系をなす. よって, パーセバルの等式は

$$\|f\|_{L^2(0,2\pi)}^2 = (2\pi)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}|c_n|^2.$$

また $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx}, g(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} d_n e^{inx}$ のとき,

$$(f,g)_{L^2(0,2\pi)} = (2\pi)\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\overline{d_n}$$

の成り立つ.
◆フーリエ級数の等周不等式への応用：(フルビッツ, 1901 年)
2 次元平面内の領域 D の境界を ∂D とするとき, **グリーンの定理**より, $A = |D|$ で D の面積を表すと,

$$A = \frac{1}{2}\int_{\partial D}(x\,dy - y\,dx)$$

となります.

定理 10 *∂D の長さを L とするとき,*

$$A \le \frac{L^2}{4\pi}$$

が成り立つ. また, 等号が成立するのは ∂D が円周のときに限る.

◆複素関数論とコーシーの定理：
複素数 $z = x + iy \in \mathbf{C}$ に対して, 複素数値関数 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ を対応させ, **複素微分可能な関数**の性質を調べるのが複素関数論です. $f(z)$ が z で複素微分可能とは,

$$\lim_{h\in\mathbf{C},h\to 0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h}$$

が一定の極限値（複素数）をもつことを言います. この極限を $f'(z)$ とかきます. 特に $z = x + iy$ として, $h = k \in \mathbf{R} \to 0$ とすると

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{(u(x+k,y)-u(x,y)) + i(v(x+k,y)-v(x,y))}{k}$$

$$\to \frac{\partial u}{\partial x}(x,y) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

となり, $h = ik \to 0, k \in \mathbf{R}$ とすると

$$\frac{f(z+h)-f(z)}{h} = \frac{(u(x,y+k)-u(x,y)) + i(v(x,y+k)-v(x,y))}{ik}$$

$$= -i\frac{(u(x,y+k)-u(x,y)) + i(v(x,y+k)-v(x,y))}{k} \to -i\frac{\partial u}{\partial y}(x,y) + \frac{\partial v}{\partial y}(x,y)$$

となる. よっていずれも同じ極限値 $f'(z)$ となることから

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y), \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x,y) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x,y)$$

という関係式が成り立つこととなります．これを**コーシー・リーマンの関係式**といいます．

◆特に，$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が 2 次元領域 Ω の各点で複素微分可能であって，u, v が D で C^1 級（つまり，1 階偏導関数がすべて連続関数となること）であるとき，$f(z)$ は Ω **で正則関数である**と呼びます．

◆閉曲線 C を $z(t) = x(t) + iy(t), a \leq t \leq b, z(a) = z(b),$ とパラメータ表示したとき，C **に沿っての複素線積分** $\int_C f(z)\,dz$ は

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b f(z(t))\frac{dz(t)}{dt}\,dt$$

で定義されます．

複素関数論において次の定理は基本的かつ重要です．

定理 11 （コーシーの積分定理）$f(z)$ は Ω で正則関数とします．今，Ω 内に滑らかな閉曲線 C をとってそれが囲む領域を D とします．このとき，

$$\int_C f(z)\,dz = 0$$

が成り立つ．　*(C の進む向きは D を左に見ながら進む向きを正とします.)*

証明: **グリーンの定理**とコーシー・リーマンの関係式より

$$\int_C f(z)\,dz = \int_a^b (u + iv)(\frac{dx(t)}{dt} + i\frac{dy(t)}{dt})\,dt$$

$$= \int_C u\,dx - v\,dy + i(\int_C v\,dx + u\,dy)$$

$$= \int\int_D (-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y})\,dxdy + i\int\int_D (-\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x})\,dxdy = 0.$$

2.4 フーリエ変換

◆フーリエ変換 $\mathcal{F}$ と逆フーリエ変換 $\mathcal{F}^*$:

$$\mathcal{F}f(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ix\xi}f(x)\,dx, \quad \mathcal{F}^*f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi}f(\xi)\,d\xi.$$

定理 12 *(基本的な公式)*
(1) $(\mathcal{F}f, g)_{L^2} = (f, \mathcal{F}^* g)_{L^2}$. よって $\|\mathcal{F}f\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}$.
(2) *(反転公式)* $\mathcal{F}^*(\mathcal{F}f)(x) = f(x)$.
(3) (微分とフーリエ変換)

$$\mathcal{F}(f')(\xi) = (i\xi)\mathcal{F}f(\xi), \quad \frac{d}{d\xi}(\mathcal{F}f(\xi)) = -\mathcal{F}(xf(x))(\xi).$$

(4) (ポワッソンの和公式)
適当に $f(x), f'(x)$ が無限遠で減衰しているとき,

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sqrt{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}f(2\pi n).$$

例. $t > 0$ をパラメータとして, $f(x) = \frac{t}{t^2+x^2}$ に対して $\mathcal{F}f(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-t|\xi|}$ となることがわかります. ポワッソンの和公式に代入して

$$\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{t}{n^2+t^2} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi t|n|} = \frac{1+e^{-2\pi t}}{1-e^{-2\pi t}}$$

を得ます.
◇**超関数のフーリエ変換**: 超関数にたいしてもフーリエ変換を一般化できます.
◆**シュワルツの急減少関数**の属 $\mathcal{S}$: $f \in C^\infty(\mathbf{R})$ であって, すべての非負整数 m, l に対して

$$|x|^l |f^{(m)}(x)| \to 0 \ (|x| \to +\infty)$$

なるとき, $f(x)$ は急減少関数であるといい, その全体からなる集合を $\mathcal{S}$ であらわします. この関数の族はフーリエ変換と相性がよく, フーリエ変換 $\mathcal{F}$ は $\mathcal{S}$ を $\mathcal{S}$ に 1 対 1 に写し, 反転公式や $(\mathcal{F}f, g)_{L^2} = (f, \mathcal{F}^* g)_{L^2}$ などがこのクラスで成り立つことがわかります.
◆**緩増加超関数** $\mathcal{S}'$: $T: \ \mathcal{S} \to \mathbf{C}$ は線形汎関数で, 次の意味で連続なとき:$\phi_n \to \phi$ in $\mathcal{S}$ ならば

$$\langle T, \phi_n \rangle \to \langle T, \phi \rangle \ (n \to +\infty),$$

T は緩増加超関数であるといい, $T \in \mathcal{S}'$ と表します. $\{\phi_n\} \subset \mathcal{S} \to \phi \in \mathcal{S}$ in $\mathcal{S}$ とは, すべての非負整数 m, l に対して

$$\max_{x \in \mathbf{R}} |x|^l |\phi_n^{(m)}(x) - \phi^{(m)}(x)| \to 0 \ (n \to +\infty)$$

が成り立つことをいう．　一般に $\mathcal{S}' \subset \mathcal{D}'$ となることがわかります．つまり $\mathcal{S}'$ は超関数の中でもフーリエ変換の定義できる適切なものなのです．

◆例．

1. (ディラックの超関数) $\langle T, \phi \rangle = \phi(0)$ で定義されるディラックの超関数は $\delta \in \mathcal{S}'$ です．

2. $f \in L^2(\mathbf{R})$ ならば

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\phi(x)\,dx,\ (\phi \in \mathcal{S})$$

として $T_f \in \mathcal{S}'$ となります．

3. (緩増加関数) 在る定数 $M, k > 0$ があって，

$$|f(x)| \leq M(1 + |x|)^k,\ (x \in \mathbf{R})$$

が成り立つような関数を緩増加関数といいます．このとき $T_f \in \mathcal{S}'$ となることがわかります．このことが $\mathcal{S}'$ を緩増加超関数と呼ぶ理由です．

◆ $\mathcal{S}'$ のフーリエ変換: $T \in \mathcal{S}'$ に対して，

$$\langle \mathcal{F}T, \phi \rangle = \langle T, \mathcal{F}\phi \rangle,\ \phi \in \mathcal{S}$$

で定義されます．

◆例．

1. (ディラックの超関数)

$$\langle \mathcal{F}\delta, \phi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}\phi \rangle = \mathcal{F}\phi(0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int \phi(x)\,dx = \langle \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \phi \rangle$$

となるので $\mathcal{F}\delta = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ です．

2.5　ソボレフ空間

ソボレフ空間は Sobolev(1936 年）によって導入された微分方程式の解を捕まえるのに適切なよい関数空間です．線形および非線形問わず偏微分方程式の現代の解析には不可欠な関数空間です．フーリエ級数やフーリエ変換の世界での同値な表現の仕方もあります．

◆ソボレフ空間 $H^1(0,1)$:

$$H^1(0,1) = \{f \in L^1(0,1)\ ;\ \frac{df}{dx} \in L^2(0,1)\}.$$

$f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n \cos(n\pi x)$ とフーリエ級数展開したとき, $f \in H^1(0,1)$ であることと

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} n^2 |a_n|^2 < +\infty$$

であることは同値となります.
◆ソボレフ空間 $H^1(\mathbf{R})$:
$f \in H^1(\mathbf{R})$ であることと

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (1+|\xi|^2)|\mathcal{F}f(\xi)|^2 \, d\xi < +\infty$$

であることは同値となります.
◆ **部分積分公式との関係**：$f, g \in H^1(a,b)$ とするとき, $f, g \in C[a,b]$ とも見なせ, さらに

$$\int_a^b \frac{df}{dx}(x) g(x)\, dx = f(b)g(b) - f(a)g(a) - \int_a^b f(x) \frac{dg}{dx}(x)\, dx$$

が成り立つ. なぜかといいますと, $C^1[a,b] \subset H^1(a,b)$ ですが, 実は $C^1[a,b]$ **は** $H^1(a,b)$ **の中で稠密であることがわかるからです**: すなわち, 任意の $u \in H^1(a,b)$ に対して $u_n \in C^1[a,b]$ なる列で

$$\|u_n - u\|^2_{H^1(a,b)} = \|u_n - u\|^2_{L^2(a,b)} + \|\frac{du_n}{dx} - \frac{du}{dx}\|^2_{L^2(a,b)} \to 0 \ (n \to +\infty)$$

となるものが取れるのです! $u \in H^1(a,b)$ **という一般的な関数を** $C^1[a,b]$ **に属するいい関数で近似できるという重要な主張です.**

2.6　関数の近似の道具-軟化子-

◆ Weierstrass の 2 つの定理：

定理 13 いたるところで微分できない連続関数が存在する.

例えば,$0 < b < 1, ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$ で a は整数として, 次の関数が 1 つの例である:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} b^2 \cos(a^n x).$$

定理 14 f を $[a,b]$ 上の連続関数とする．任意の $\epsilon > 0$ に対して，ある多項式が存在して

$$\max_{x\in[a,b]} |f(x) - p(x)| < \epsilon$$

が成り立つ．

ランダウによる証明 (1908) で，$0 < a < b < 1$ とし，$\phi_n(x) = C_n(1 - x^2)^n, |x| \le 1,\ \phi_n(x) = 0\ \ |x| > 1$ なる関数が考えられた．ここで $C_n > 0$ は $\int_{-1}^{1} \phi_n(x) = 1$ を満たすように定める．実際

$$C_n = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n+1)}{2 \cdot 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots (2n)}.$$

$\phi_n(x)$ は $x = 0$ に凝縮していくような関数列であることに注意しましょう． $p_n(t) = \int_0^1 \phi_n(t-x) f(x)\, dx$ とおくと，$p_n(t)$ は多項式となります．$p_n(t) \to f(t)\ (n \to +\infty)$ が示されたのです．$p_n(t)$ はいわば $f(x)$ の t の近くの平均みたいなものです．

◆フリードリックスの軟化子 (1944 年): $0 \le \rho(x) \in C^\infty(\mathbf{R})$, $\rho(x) = 0\ (|x| \ge 1)$ かつ $\int \rho(x)\, dx = 1$ なる関数を 1 つとりましょう．例えば

$$\rho(x) = C_0 e^{-\frac{1}{1-|x|^2}},\ |x| < 1, \quad \rho(x) = 0,\ |x| \ge 1.$$

このとき，$\rho_n(x) = n\rho(nx)$ として

$$(S_n f)(x) = (\rho_n * f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_n(x-y) f(y)\, dy$$

で定義される作用素 $S_n:\ f \to \rho_n * f$ を**フリードリックスの軟化作用素**といいます． (この考え方は既に J.Leray(1934 年) もしていたようですが.) また ρ_n を**軟化子**といいます．$f(x)$ が連続なら，$(S_n f)(x)$ は滑らかで各有界集合上で一様収束します．また，$1 \le p < +\infty$ で

$$\|f\|_{L^p} = (\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p\, dx)^{1/p} < +\infty$$

なるとき，$S_n f \in C^\infty \cap L^p(\mathbf{R})$ であり，

$$\|S_n f - f\|_{L^p} \to 0\ (n \to +\infty)$$

となります．

第3章　方程式の解をつかまえるには … 不動点定理

◆今回は, 代数方程式や微分方程式の解をつかまえるのに有効な**不動点定理**について話をしましょう. 特に, **バナッハの不動点定理**（別名, **縮小写像の原理**とも呼ばれるものの一種ですが）と**シャウダーの不動点定理**とそれらの現代解析学への応用について紹介したいと思います. 一般に代数方程式でも微分方程式でも, ある関数（あるいは写像）$F(u)$ に対して $F(u)=0$ を満たすような解 u を求めることに帰着できることが多いです. そのとき, $G(u)=u-F(u)$ という新たな関数（あるいは写像）G を考えることで, $G(u)=u$(これを満たす u のことを写像 G の**不動点**と呼ぶわけです) を満たす u を見つける問題へと置き換えられます. なんらかの条件のもとに写像 G の不動点 u の存在を保証してくれるのが, **不動点定理**です.

◆**バナッハの不動点定理**では, 単に不動点 (解）の存在を保証してくれるだけでなく, **近似解をも与え**, その解がどこにあるかとかどのようなものであるかについての情報も与えてくれる利点があります. 一方で, **シャウダーの不動点定理**はどこかに存在するということは教えてくれますが, 詳しい解の情報はわからないという欠点もあります. しかしながら, **その応用範囲はシャウダーの不動点定理のほうがはるかに広い**という長所もあるのです.

◆バナッハの不動点定理（縮小写像の原理）においては, 特に, **完備性**という性質を持った**完備な距離空間**という舞台が重要な役割を演じます. そのため, 関数空間でもルベーグ空間とか, ソボレフ空間とか**完備なノルム空間**（**バナッハ空間**とか**ヒルベルト空間**とか) の中で解を見つけるという視点が現代解析学においてとても活躍することとなるわけです.

□文献ガイド: 特に, 不動点定理とその応用については *[増田]* **を参照ください. 関数解析やソボレフ空間の偏微分方程式の境界値問題への応用については** *[ブレジス]* **や** *[ヨスト]* **がよいでしょう. また, 非線形シュレディ**

ンガー方程式の初期値問題の解の存在を示すのにどういう風にバナッハの不動点定理を用いるのかは *[堤]* に解説がありますのでごらんください. また, 意外と思われるかも知れませんが, フラクタル図形の存在とか特徴付けに縮小写像の原理が巧妙に用いられます. その様子は, *[木上等]* よいと思います.

3.1　完備な距離空間

◆距離空間: 一般に集合 X の 2 つの元 x, y に非負の値 $d(x,y)$ を与える対応で (距離と呼ぶにふさわしい) 次の 3 つの性質:
(1) $d(x,y) \geq 0,\ (x,y \in X)$ であって, $d(x,y)=0$ となるのは $x=y$ のときに限る;
(2) $d(x,y)=d(y,x),\ (x,y \in X)$;
(3)(三角不等式) $d(x,y) \leq d(x,z)+d(z,y),\ (x,y,z \in X)$ が成り立つ;
をもつものがあるとき, $d(x,y)$ を x と y の距離と呼び, 集合 X には距離が入っているといい, X はこの距離 $d(x,y)$ に関して距離空間の構造を持つといいます. この距離空間を X と距離 d のペア (X,d) であらわすこともあります.
同じ空間 X に対してでも, 違う距離の構造が入る事があるので注意する必要があります.
◆例.
1. $X=\mathbf{R}$(実数全体からなる集合) には普通の距離が絶対値によって入っています, すなわち $d(x,y)=|x-y|$ です.
2. $X=\mathbf{R}^2=\{(x_1,x_2)\ :\ x_1,x_2 \in \mathbf{R}\}$ は 2 次元平面上の点全体からなる集合ですが, ここにも自然は距離 (ユークリッド距離と呼ばれます) が入っていることはご存知でしょう, $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2) \in \mathbf{R}^2$ として

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}.$$

3.$X=C[0,1]$(区間 $[0,1]$ 上の実数値の連続関数全体からなる集合です) を考えましょう. この集合の 1 つの元は 1 つの連続関数 f をあらわします. ここにはたとえば次の 2 つの距離を入れることができます : $f,g \in X$ に対して,

$$d_1(f,g)=\max_{0\leq x\leq 1}|f(x)-g(x)|,$$

$$d_2(f,g)=\int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx.$$

つまり距離空間 (X, d_1) と (X, d_2) を考えることができるわけです．何が違うのかといいますと, 2 つの連続関数 $f(x), g(x)$ が近いか遠いかを図るものさしが異なるのです．たとえばある関数 $f(x), g(x)$ で $d_2(f, g)$ は非常に小さい値であるが, $d_1(f, g)$ は小さくはない, という状況が起こります．**したがって, どの距離を備えた空間 (X, d) を考えるかはとても重要なこととなります.**

◆完備性:

距離空間 (X, d) の元からなる点列 $\{x_n\}$ がある元 $y \in X$ があって, $d(x_n, y) \to 0$ $(n \to +\infty)$ を満たすとき, $\{x_n\}$ は y に収束するといいます．このことを, $\{x_n\}$ **は収束列である**, という言い方もします．

また, $\{x_n\}$ が次の条件：

$$d(x_n, x_m) \to 0 \ (n, m \to +\infty)$$

を満たすとき, **コーシー列である**といいます．$\{x_n\}$ **が収束列ならば, コーシー列となる**ことがわかりますが, その逆は必ずしも正しくありません．その逆が成り立つような距離空間は実は大切です．

◇数列 $\{a_n\}$ がコーシー列であるとは, 上の定義から

$$|a_n - a_m| \to 0 \ (n, m \to +\infty)$$

となることです．高校数学では, ある具体的な数 a に収束するような数列 $\{a_n\}$ しか出てきませんが, 一般に与えられた数列が $\{a_n\}$ がどこかの値に収束するのかどうか不明で, まずはその判定をしたい場合が出てきます．**実は数列がコーシー列であることさえわかれば, どこかの値に収束することが保障されるのです！**たとえば次で定義される数列 $\{a_n\}$ や $\{b_n\}$ はどこかの値に収束するような数列でしょうか？

$$a_1 = 1, a_{n+1} = \cos a_n \ (n = 1, 2, \cdots),$$

$$b_1 = \frac{1}{2}, b_{n+1} = 3b_n - 3b_n^2 \ (n = 1, 2, \cdots)$$

◆距離空間 (X, d) において, **コーシー列 $\{x_n\}$ が必ず収束列となるという性質が成り立つとき**, (X, d) は**完備な距離空間**であるといいます．

例.

1. $\mathbf{R}, \mathbf{R}^2$ は先に説明した普通の距離に関して, 完備な距離空間となります．

2. $X = C[0,1]$ **は距離** $d_1(f,g) = \max_{0\le x\le 1}|f(x)-g(x)|$, **に関して，完備な距離空間となります**. しかしながら, 距離 $d_2(f,g) = \int_0^1 |f(x)-g(x)|\,dx$. については完備ではないことがわかります (実際, コーシー列ではあるが, 収束列とならない関数列 $\{f_n\} \subset X$ を作れるのです).
3. p を $1 \le p < +\infty$ を満たす実数として,

$$X = L^p(0,1) = \{f \text{ はルベーグ可測関数 } : \int_0^1 |f(x)|^p\,dx < +\infty\}$$

は, 距離：

$$d(f,g) = (\int_0^1 |f(x)-g(x)|^p\,dx)^{1/p}$$

に関して完備な距離空間となることが知られています. **この完備な距離空間を得るためにルベーグ積分の理論が構築されたといってもよく，現代解析学に欠かせない関数空間となっています!**. これを**ルベーグ空間**とも言います.

◇ルベーグ可測関数とは？$f(x)$ がルベーグ可測関数とは, だいたい階段関数の列 $\phi_n(x)$ で近似できる関数と思っていていただければよいです.　階段関数というのは, 有限個の区間上でそれぞれある値をとり, そのほかでは 0 となるという単純な関数です. しかしそういった単純な階段関数の極限で表される関数を全部集めるとかなり一般的な関数の集まりを考えることとなるのです. 例えば, 連続関数の列 $\{f_n\}$ の極限関数 $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ は必ずしも連続関数となりませんが、ルベーグ可測関数の列 $\{f_n\}$ の極限関数 $f(x) = \lim_{n\to+\infty} f_n(x)$ は必ずルベーグ可測関数となります. **つまり，ルベーグ可測関数全体のなす集合は，極限操作について閉じた世界を作っているのです!**

◆ノルム空間：
一般に和とか実数倍が意味を持つような集合 X（線形空間といいますガ）の 2 つの元 x に非負の値 $\|x\|$ を与える対応で (**長さと呼ぶにふさわしい**) 次の 3 つの性質:
(1) $\|x\| \ge 0,\ (x \in X)$ であって, $\|x\| = 0$ となるのは $x = 0$ のときに限る;
(2) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|,\ (\alpha \in \mathbf{R}, x \in X)$;
(3)(**三角不等式**) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|,\ (x,y \in X)$ が成り立つ;
をもつものがあるとき, $\|x\|$ を x **のノルム**と呼び, X はこのノルム $\|x\|$ に関して**ノルム空間**の構造を持つといいます.

◆**例.** 1. $1 \le p < +\infty$, $X = L^p(a,b)$ に対して

$$\|f\|_{L^p(a,b)} = (\int_a^b |f(x)|^p \, dx)^{1/p}$$

はノルムとなり, L^p**-ノルム**と呼ばれます.
◆ X がノルム空間であれば, 距離を $d(x,y) = \|x-y\|$ として, 距離空間となります.
◆特に, **完備性をもったノルム空間**を**バナッハ空間**と呼びます. バナッハ空間であって, さらに**内積**を持っている空間を**ヒルベルト空間**と呼びます.
例.
1. $X = L^2(a,b)$ に対して

$$(f,g)_{L^2(a,b)} = \int_a^b f(x)g(x)\, dx$$

は内積となり, L^p**-内積**と呼ばれます.　ベクトルの内積とのアナロジーで, $(f,g)_{L^2(a,b)} = 0$ のとき,**関数** $f(x)$ **と** $g(x)$ **とは直交する**といいます. $L^2(a,b)$ **はヒルベルト空間の代表例で, さまざまな状況で活躍する関数空間です.**
2. $X = H^1(a,b) = \{f \in L^2(a,b) \ : \ \frac{df}{dx} \in L^2(a,b)\}$ を**ソボレフ空間**と呼んだわけですが, $f, g \in H^1(a,b)$ に対して

$$(f,g)_{H^1(a,b)} = (f,g)_{L^2(a,b)} + (\frac{df}{dx}, \frac{dg}{dx})_{L^2(a,b)}$$

は内積を定め, 付随するノルム:

$$\|f\|_{H^1(a,b)} = \sqrt{(f,f)_{H^1(a,b)}} = \sqrt{\int_a^b |f(x)|^2 \, dx + \int_a^b |\frac{df}{dx}(x)|^2 \, dx}$$

が完備性をもつことがわかります. 従って**ソボレフ空間** $H^1(a,b)$ **もヒルベルト空間の構造をもつ**ことになります.

◇例えば, 熱伝導現象, 波動現象, 電磁気学等に現れるポアソンの偏微分方程式: $D \subset \mathbf{R}^2$ を有界な領域として,

$$-\Delta u(x) = f(x)\ (x = (x_1, x_2) \in D), \quad u(x) = g(x)\ (x \in \partial D)$$

の境界値問題の解を捕まえるのにこのソボレフ空間 $H^1(D) = \{f \in L^2(D)\ :\ \frac{\partial f}{\partial x_j} \in L^2(D), j = 1, 2\}$ が有効です. ここで Δ は**ラプラシアン**と呼ばれる2階の偏微分作用素で

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$$

非線形現象を記述する非線形偏微分方程式の解析においても活躍します.

3.2　縮小写像の原理 (バナッハの不動点定理)

◆縮小写像の原理を特にバナッハ空間において述べたものがバナッハの不動点定理です. ここでは, 完備な距離空間上で成り立つ縮小写像の原理を述べてみます. 一見, 縮小写像という特殊な写像に対しての不動点の存在を保証するものですが, 意外と応用範囲は広いのです.

定理 15 *(X, d) を完備な距離空間とする.　X 上の写像 T があって, ある定数 $0 < k < 1$ があって次の条件を満たすとする:*

$$d(T(x), T(y)) \leq kd(x, y),\ (x, y \in X).$$

*(こういう写像のことを***縮小写像***といいます.) このとき T はただ1つの不動点 x（すなわち $T(x) = x$ を満たすもの）をもつ.*

◆**証明:** (step 1:)（**不動点の存在証明**) いま勝手に $x_0 \in X$ を取ってきて, $x_{n+1} = T(x_n), n = 1, 2, \cdots$ と定めることで点列 $\{x_n\}$ を得ます. このとき, 仮定から順次

$$d(x_{n+1}, x_n) = d(T(x_n), T(x_{n-1})) \leq kd(x_n, x_{n-1}) = kd(T(x_{n-1}), T(x_{n-2}))$$

$$\leq k^2 d(x_{n-1}, x_{n-2}) \leq \cdots \leq k^n d(x_1, x_0)$$

を得ます. ここで $m > n$ なる m, n に対して, 三角不等式と上の不等式を用いて

$$d(x_m, x_n) \le d(x_m, x_{m-1}) + d(x_{m-1}, x_{m-2}) + \cdots + d(x_{n+1}, x_n)$$
$$\le (k^{m-1} + k^{m-2} + \cdots + k^n) d(x_1, x_0) \le k^n \frac{1}{1-k} d(x_1, x_0)$$

となります. これより $d(x_m, x_n) \to 0$ $(m, n \to +\infty)$ が成り立つこととなりますので, $\{x_n\}$ はコーシー列であることとなります. ここで X は完備な距離空間だったので, その完備性から, ある元 $x^* \in X$ が存在して $d(x_n, x^*) \to 0$ $(n \to +\infty)$ が成り立ちます. もう一度仮定の式より $d(T(x_n), T(x^*)) \le kd(x_n, x^*)$ から, $T(x_n) \to T(x^*)$ がなりたちます. よって $x_{n+1} = T(x_n)$ で両辺の極限をとることで,

$$T(x^*) = x^*$$

となり, x^* が T の不動点.
(Step 2:)(**不動点の一意性**) x^*, x^{**} がともに不動点であるしよう. すなわち

$$T(x^*) = x^*, \quad T(x^{**}) = x^{**}.$$

仮定の式から

$$d(x^*, x^{**}) = d(T(x^*), T(x^{**})) \le kd(x^*, x^{**})$$

となり, $(1-k)d(x^*, x^{**}) \le 0$ となり $k < 1$ から $d(x^*, x^{**}) = 0$ を得る. したがって $x^* = x^{**}$ とならなければならないことがわかりました.
◆任意の x_0 からはじめて**逐次近似**: $x_{n+1} = T(x_n)$ で作った点列 $\{x_n\}$ はただ 1 つの不動点 x^* に収束することがわかったわけです. その意味で x_n **は近似解**であって次を満たすことがわかった:

$$d(x_n, x^*) \le \frac{k^n}{1-k}.$$

◆応用例:
1. 常微分方程式の初期値問題の解の一意存在定理:
$f(t, x)$ が (t, x) に関して連続関数であって, 在る定数 $L > 0$ に対して条件 :

$$|f(t, x) - f(t, y)| \le L|x - y|, \quad (t \in \mathbf{R}, x, y \in \mathbf{R})$$

を満たしているとしよう．このとき任意の初期値 a に対して

$$\frac{du}{dt}(t) = f(t, u(t)), t \in \mathbf{R}, \quad u(0) = a$$

を満たす解 $u(t)$ がただ 1 つ存在する．ポイントは $u(t)$ が求める解であることと**次の積分方程式：**

$$u(t) = a + \int_0^t f(s, u(s))\, ds$$

を満たすことは同値であること (微分積分の基本公式からの帰結です）で, $T > 0$ を勝手に定めて, 写像 F を $v \in C[0, T]$ に対して

$$(Fv)(t) = a + \int_0^t f(s, v(s))\, ds$$

と定義し, F の関数空間 $X = C[0, T]$ 上での不動点として探すということです.

◇ $f(t, x)$ が x に関して 2 次以上の多項式でかけている場合などの非線形微分方程式の場合は, 一般に上の条件は正確には満たしませんが、短い時間の間なら同様の方法で解の一意存在が証明できます.

2. 境界値問題への応用：

例えば

$$-\frac{d^2u(x)}{dx^2} = f(x, u(x)),\ x \in (a, b),$$

を満たし, 境界条件:

$$u(a) = 0,\ u(b) = 0$$

を満たす関数 $u(x)$ を見つめる問題を**境界値問題**といいます．これを**グリーン関数**と呼ばれる $G(x, y)$ を用いて,

$$u(x) = \int_a^b G(x, y) f(y, u(y))\, dy$$

を満たす $u(x)$ を見つける問題に帰着することができ, このときは写像 F を $v \in X = \{v \in C[0, T] :\ v(a) = v(b) = 0\}$ に対して

$$(Fv)(x) = \int_a^b G(x, y) f(y, v(y))\, dy$$

と定義し, F の関数空間 X 上での不動点として探がすこととなります．この場合は解の存在・非存在は, 初期値問題の場合と違って関数 $f(t, x)$ の構造に強くよります.

◇そのほかにも, 空間多次元の問題とかにも有効です (最近私自身も, 数理生態学におけるパターン形成モデルとして有名なギーラー・マインマルト系の定常解の存在証明に利用しました）. レーザーや非線形光学などに関連した非線形シュレディンガー方程式の初期値問題の解の存在問題などにも現在でもなおこの縮小写像の原理が基礎となって活躍しています. そこでは解きたい関数空間としての完備距離空間をうまく選ぶ必要があります.

3.3 ブラウワーの不動点定理

◆ブラウワーの不動点定理は微分積分学における中間値の定理と密接に関連します.

定理 16 n 次元球 : $B = \{x \in \mathbf{R}^n \ : \ |x| = \sqrt{|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2} \leq 1\} \subset \mathbf{R}^n$ に対して, B から B への連続写像 f があるとき, f はすくなくとも 1 つ不動点 x をもつ（すなわち, $f(x) = x$ となる点）をもつ.

◆空間 1 次元 ($n = 1$) のときは, 中間値の定理からわかります. 実際, $g(x) = f(x) - x$ とおくとき, 仮定から $f(x) \in B$ より $|f(x)| \leq 1$ となるので, $g(1) = f(1) - 1 \leq 0, g(-1) = f(-1) + 1 \geq 0$ となることがわかります. よって中間値の定理から $g(x) = 0$ となる x が存在することとなり, この x は $f(x) = x$ を満たすので求める不動点です.

◇ $M = \{x \in \mathbf{R}^n : \ 1 \leq |x| \leq 2\}$ のような円環領域とするとき, M から M への連続写像 f は必ずしも, 不動点を持つとはいえません. たとえば, 原点の周りの回転写像を考えれば, 不動点はないからです. **つまり D から D への連続写像 f が不動点を持つには D になんらかの幾何学的条件が必要なのです.** 実は D が必ずしも球でなくても凸な領域ならこの不動点定理は成り立つことも知られています.

◆ 2 次元のブラウワーの定理の証明の概略: $B = \{x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 1\}$ として, B から B への連続写像 f がすくなくとも 1 つの不動点をもつことを示したい. ここでは, **f は何回でも微分できるようないい写像の場合に証明**してみよう. (一般の連続写像 f の場合には, f をいい写像で近似して考察することで証明できることとなります.)

そこで, f が不動点を持たないとして矛盾を導く方針をとります. 仮定から $f(x) - x \neq 0$ $(x \in B)$ となる. このとき

$$u(x) = \frac{x - f(x)}{\|x - f(x)\|}$$

として $x + \alpha u(x) \in \partial B$ となるような実数 α は,　(x および $x - f(x)$ を２次元ベクトルとみなして図を描いてみるとわかりやすいが), かならず 2 つあるので, そのうちの 1 つを,

$$\alpha = \alpha(x) = -(x \cdot u) + \sqrt{1 - \|x\|^2 + (x \cdot u)^2} \ \ (\geq 0)$$

としましょう. このとき, 特に $x \in \partial B$ なら $\alpha(x) = 0$ となり, また $\alpha(x)$ は滑らかな関数となることに注意しましょう. ここで

$$F(t,x) = \begin{pmatrix} F_1(t,x) \\ F_2(t,x) \end{pmatrix} = x + t\alpha(x)(x - f(x))$$

とおくと F は $(t,x) \in [0,1] \times B \to B$ は滑らかな写像となります. また

$$\frac{\partial F}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} \end{pmatrix}$$

として,

$$G(t,x) = \begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{vmatrix}$$

とおきます (右辺は 2×2 の行列式です）. このとき,$F(1,x) \in \partial B$ より

$$G(0,x) = 1,\ G(1,x) = 0$$

となる. また

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \alpha(x)(x - f(x)) = 0 \ (x \in \partial B)$$

にも注意する. さらに, 行列式の性質から次の恒等式が成立する：

$$-\frac{\partial}{\partial t}\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{vmatrix} + \frac{\partial}{\partial x_1}\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{vmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_2}\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial x_1} \end{vmatrix} = 0.$$

以上より

$$|B| = \int\int_B (G(1,x) - G(0,x))\, dx_1\, dx_2 = \int\int_B \left(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} G(t,x)\, dt\right) dx_1\, dx_2$$

$$= \int\int_B \Big(\int_0^1 \frac{\partial}{\partial x_1} \left| \begin{matrix} \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{matrix} \right| - \frac{\partial}{\partial x_2} \left| \begin{matrix} \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial x_1} \end{matrix} \right| dt \Big) \, dx_1 \, dx_2$$

$$\int_0^1 \Big(\int\int_B \frac{\partial}{\partial x_1} \left| \begin{matrix} \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{matrix} \right| - \frac{\partial}{\partial x_2} \left| \begin{matrix} \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial x_1} \end{matrix} \right| dx_1 \, dx_2 \Big) \, dt$$

となる．ところが**グリーンの定理**と $x \in \partial B$ では

$$\left| \begin{matrix} \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial x_2} \end{matrix} \right| = 0 = \left| \begin{matrix} \frac{\partial F}{\partial t} & \frac{\partial F}{\partial x_1} \end{matrix} \right|$$

となることから, 上の式の右辺 0 となり, 左辺と比較して矛盾となります. したがって, 不動点をもつこととなります.

3.4 シャウダーの不動点定理

◆ブラウワーの不動点定理を関数空間などの無限次元空間に拡張したものがシャウダーの不動点定理です. 解があるのかないのか判定が微妙なときに威力を発揮したりします. 無限次元空間には単なる一般化はできなくて, **コンパクト写像**という性質を持つものに対してはうまく一般化できることになります. **コンパクト**という概念は, 現代数学においてももっとも大切な概念の 1 つです.

◆コンパクト写像:

バナッハ空間上の写像 $T : X \to X$ が**コンパクト写像**とは, 連続写像であって, かつ次の性質をもつ : ある $M > 0$ に対して $\|x_n\| \leq M$ $(n \geq 1)$ であるようないかなる点列 $\{x_n\}$ に対しても, T で移った先での点列 $\{Tx_n\}$ は収束するようなある**部分列**をもつことをいいます.

例. $X = C[a, b]$ はノルム $\|f\|_{max} = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$ でバナッハ空間をなす. $G(x, y)$ を $(x, y) \in [a, b] \times [a, b]$ の連続関数とするとき,

$$(Tf)(x) = \int_a^b G(x, y) f(y) \, dy, \;\; f \in X$$

で写像 $T : X \to X$ を定める. この写像 T は X 上のコンパクト写像となることがわかっています.

定理 17 X をバナッハ空間とし, $M > 0$ として $B = \{x \in X : \; \|x\| \leq M\}$ とする. このとき B から B へのコンパクト写像 T はすくなくとも 1 つの不動点 x をもつ (すなわち, $Tx = x$ を満たす x).

2つのバナッハ空間 $(X, \|\cdot\|_X), (Y, \|\cdot\|_Y)$ があって，X から Y への写像 $T : X \to Y$ が**コンパクト写像**とは，連続写像であって，かつ次の性質をもつ：ある $M > 0$ に対して $\|x_n\|_X \leq M$ $(n \geq 1)$ であるようないかなる点列 $\{x_n\}$ に対しても，T で移った先での点列 $\{Tx_n\}$ は Y において収束するようなある**部分列**をもつことをいいます．例えば，$a < b, a, b \in \mathbf{R}$ として，ソボレフ空間 $X = H^1(a, b)$ **から** $Y = L^2(a, b)$ **への恒等写像** I **はコンパクト写像である**ことが知られています．さらに $X = H^1(a, b)$ の関数は連続関数と同一視できるという事実をふまえて，$X = H^1(a, b)$ **から** $Y = C[a, b]$ **への恒等写像もコンパクト写像である**ことがわかります．これらは**レーリッヒのコンパクト性定理**とか**ソボレフの埋め込み定理**と呼ばれるものの1つで，非線形問題の解析に重要な役割を果たします．

第4章　解析学の武器 ⋯ 不等式と漸近挙動

◆解析学は不等式の学問だとも言われます. 等式に比べて, 不等式の扱い方には独特の難しさもあるようです.　何か数列とか関数とかの具体的な値を得るのが難しかったり, たとえ具体的な表示ができても知りたい定性的な情報を得るのが等式からはわかりにくかったりすることがあります. そうした際, **知りたい定性的情報 をわかりやすい評価として取り出すこと**が重要です. たとえ同じ量を評価するにしても, ときには, ある目的のためには**比較的大雑把な評価**でよかったり, 別の目的のためには**最良の評価**は何かを突き詰めないといけなかったりと臨機応変な対応をできるセンスが必要なのです.

◆解析学, 微分方程式, 非線形現象の解析などによく利用される基本的な不等式として, **シュワルツの不等式**とその一般化といえる**ヘルダーの不等式**, **ハーディの不等式**と**ポアンカレの不等式**, **ソボレフの不等式**などを紹介します. 特に, ソボレフの不等式の最良版が等周不等式と密接に関連することを味わいます.

◆不等式とは少し異なりますが, 在る量の定性的性質を調べる見方に漸近挙動とか漸近公式といったものがあります. $\lim_{n\to+\infty} a_n = \alpha$ がわかっているが, どのくらいのスピードで α に近づくのか？$\lim_{n\to+\infty} a_n = +\infty$ がわかっているが, どのくらいのスピードで増大していくのか? 例えば, **漸近公式**：

$$a_n = A_1 n^{\alpha_1} + A_2 n^{\alpha_2} + \cdots, \quad (n \to +\infty)$$

ここで, $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots$, の係数 A_1, A_2 や増大度 α_1, α_2 などに, 重要な情報が現れたりすることがあって, そういった**漸近公式に数理現象の特徴が視えてきたりする**のです.

◆関数列 $u_n(x)$ が, 各 x で $\lim_{n\to+\infty} u_n(x) = 0$ を満たすというが, 関数 $u_n(x)$ の全体的なグラフの形状はどうなっているのか？さまざな非線形現象の解析 (特異摂動問題と呼ばれる一群の非線形問題）で解の凝縮現象な

どより詳しい解の形状を調べるのに漸近解析といわれる手法が活用されています．□文献ガイド：不等式についてさまざまな角度からの論説が*[数理科学 1]*(手に入りにくいかもしれませんが）に見られて興味深いです．ここに紹介した不等式はほとんど例えば *[ブレジス]* に出ています．実は「ソボレフ空間」で一冊の本があったり，はたまた「不等式」という 1 冊の本もあるくらいです．シュワルツの不等式は，なんでもないようですが，その簡潔性と応用の広さでは群を抜いているわけです．不等式はそうした基本的な道具という感じですね．漸近公式はどちらからというと個々の現象に付随した特徴的な個性あふれるものといった感じが強いです．*[高橋]* はいくつかの特徴的な漸近公式の面白みを紹介してくれます．非線形現象の数理については，*[山口]*，*[柳田]*，*[数理科学 2]* を参照ください．もっと気楽に楽しめそうな本として，*[竹中]*,*[蔵本]*，*[シン]* を挙げておきます．最後の *[シン]* は，フェルマーの定理に焦点をあわせながらも，随所に現代数学の状況をいろんな側面から感じさせてくれる名著だと思います．最後に私自身も村田先生と共著で関数解析やソボレフ空間をベースに偏微分方程式の理論について書いた本 *[村田・倉田]* がありますので何かのご参考にしていただければ幸いです．

4.1　不等式

◆高校の教科書にも出ている基本的な不等式として，シュワルツの不等式 (A.H.Schwarz, 1885) があります．

定理 18

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \le (\int_a^b f(x)^2\,dx)^{1/2}(\int_a^b g(x)^2\,dx)^{1/2}.$$

証明: $f(x), g(x) \ge 0$ として差し支えないことに注意しておきます．任意の実数 t に対して

$$0 \le \int_a^b (f(x)-tg(x))^2\,dx = \int_a^b f(x)^2\,dx - 2t\int_a^b f(x)g(x)\,dx + t^2(\int_a^b g(x)^2\,dx).$$

平方完成して

$$0 \le (\int_a^b g(x)^2\,dx)\Big[t - \frac{\int_a^b fg\,dx}{\int_a^b g^2\,dx}\Big]^2 - \frac{(\int_a^b fg\,dx)^2}{\int_a^b g^2\,dx} + \int_a^b f^2\,dx$$

が任意の t で成り立つためには,

$$-\frac{(\int_a^b fg\,dx)^2}{\int_a^b g^2\,dx}+\int_a^b f^2\,dx \geq 0$$

とならなければならない. これを整理してシュワルツの不等式を得る.
◆シュワルツの不等式の一般化として次のヘルダーの不等式があります.

定理 19 $1<p,q<+\infty$ が互いに共役な指数関係*:* $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ にあるとします. このとき次が成り立つ*:*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leq (\int_a^b |f(x)|^p\,dx)^{1/p}(\int_a^b |g(x)|^q\,dx)^{1/q}.$$

◆ $p=q=2$ の場合が, シュワルツの不等式です. 共役指数 p,q に対して, $p=\frac{q}{q-1}$ や, $p-1=\frac{1}{q-1}$ という関係が成り立つことに注意しましょう.
ヘルダーの不等式の証明: 証明には, $a,b\geq 0$ に対して

$$ab \leq \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

が成り立つこと (ヤングの不等式と呼ばれる）を用います.
　まず, $\int_a^b |f|^p\,dx=1, \int_a^b |g|^q\,dx=1$ と仮定して, $\int_a^b |fg|\,dx \leq 1$ を示します. ヤングの不等式を用いて

$$|f(x)g(x)| \leq \frac{|f(x)|^p}{p}+\frac{|g(x)|^q}{q}$$

なので, これを積分して

$$\int_a^b |fg|\,dx \leq \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

となる. よって, この場合は示されました. 一般には, f,g に対して

$$F(x)=\frac{f(x)}{(\int_a^b |f|^p\,dx)^{1/p}},\ G(x)=\frac{g(x)}{(\int_a^b |g|^q\,dx)^{1/q}}$$

とおけば $\int_a^b |F|^p\,dx=\int_a^b |G|^q\,dx=1$ なので, 先の評価が使えて, その結果示すべき不等式を得ることになります
◆ヘルダーの不等式はさらに一般化されて, $1<p_j<+\infty, j=1,2,\cdots,m$ で

$$\frac{1}{p_1}+\frac{1}{p_2}+\cdots+\frac{1}{p_m}=1$$

なる関係を満たすとき, 次が成り立つ.

$$\int_a^b |f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x)|\,dx$$

$$\leq (\int_a^b |f_1(x)|^{p_1}\,dx)^{1/p_1}(\int_a^b |f_2(x)|^{p_2}\,dx)^{1/p_2}\times\cdots\times(\int_a^b |f_m(x)|^{p_m})^{1/p_m}.$$

証明は $m=2$ の場合をもとに, $m\geq 2$ に関して帰納法で示せます.
◆状況に応じてどういう $(p_1, p_2, \cdots, p_m)$ の組に対してヘルダーの不等式を用いるのか状況判断が必要となります. 例えば, 次のように:

$$\int_a^b |f_1(x)f_2(x)f_3(x)|\,dx$$

$$\leq (\int_a^b |f_1(x)|^{3/2}\,dx)^{2/3}(\int_a^b |f_2(x)|^6\,dx)^{1/6}(\int_a^b |f_3(x)|^6)^{1/6}.$$

◆シュワルツの不等式もヘルダーの不等式も空間 2 次元以上での領域 D での重積分に対しても成り立つ：すなわち, $1<p,q<+\infty$ が $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ を満たすとき,

$$\int\int_D |f(x)g(x)|\,dx \leq (\int\int_D |f(x)|^p\,dx)^{1/p}(\int\int_D |g(x)|^q\,dx)^{1/q}.$$

◆ u とその微分の L^2-ノルムに関する不等式として, ポアンカレの不等式とハーディの不等式があります.

定理 20 *(ポアンカレの不等式)* $u\in C^1[0,L]$ で $u(0)=u(L)=0$ に対して次が成り立つ*:*

$$\int_0^L u(x)^2\,dx \leq \frac{4L^2}{\pi^2}\int_0^L (\frac{du(x)}{dx})^2\,dx.$$

証明: ◇ここでは, 右辺の定数が最良ではないが,

$$\int_0^L u(x)^2\,dx \leq \frac{L^2}{2}\int_0^L (\frac{du(x)}{dx})^2\,dx$$

の形のポアンカレ不等式を示そう. u の L^2 ノルムは $\frac{du}{dx}$ の L^2 ノルムの定数倍で評価できるという点では, 最良定数でなくとも十分に意義在る不等式といえるのです.

$u(0)=0$ より, 微分積分の基本公式から

$$u(x)=\int_0^x u'(t)\,dt.$$

シュワルツの不等式を用いて

$$|u(x)|\le (\int_0^x 1^2\,dt)^{1/2}(\int_0^x (u'(t))^2\,dt)^{1/2}\le \sqrt{x}(\int_0^L (u'(t))^2\,dt)^{1/2}.$$

よって

$$|u(x)|^2\le x\int_0^L (u'(t))^2\,dt,\quad (x\in[0,L]).$$

これを積分して

$$\int_0^L |u(x)|^2\,dx\le (\int_0^L x\,dx)\int_0^L (u'(t))^2\,dt=\frac{L^2}{2}\int_0^L (u'(t))^2\,dt.$$

定理 21 *(ハーディの不等式)* $u\in C_0^1(0,+\infty)=\{u\in C^1(0,+\infty):$ ある$\epsilon>0$ と $M>0$ が存在して $u(x)=0$ $(0<x\le\epsilon, x\ge M)\}$ 対して次が成り立つ*:*

$$\int_0^{+\infty}(\frac{u(x)}{x})^2\,dx\le 4\int_0^{+\infty}(\frac{du(x)}{dx})^2\,dx.$$

証明: まず

$$(\frac{1}{x}u(x)^2)'=-\frac{1}{x^2}u(x)^2+2\frac{u(x)}{x}u'(x).$$

これを $(0,+\infty)$ で積分すると, $u\in C_0^1(0,+\infty)$ なので

$$0=\int_0^{+\infty}(\frac{1}{x}u(x)^2)'\,dx=-\int_0^{+\infty}\frac{u(x)^2}{x^2}\,dx+2\int_0^{+\infty}\frac{u(x)}{x}u'(x)\,dx.$$

シュワルツの不等式から, 右辺の第 2 項目は

$$2(\int_0^{+\infty}(\frac{u(x)}{x})^2\,dx)^{1/2}(\int_0^{+\infty}(u'(x))^2\,dx)^{1/2}$$

以下となるので,

$$\int_0^{+\infty}\frac{u(x)^2}{x^2}\,dx\le 2(\int_0^{+\infty}(\frac{u(x)}{x})^2\,dx)^{1/2}(\int_0^{+\infty}(u'(x))^2\,dx)^{1/2}$$

を得る. これより結論を得る.

◆ソボレフの不等式にはいくつかバージョンがあります. 1 つは,

定理 22 $u \in H^1(a,b)$ に対して, 実は $u(x)$ は連続関数と同一視できて, 次が成り立つ:

$$\max_{x\in[a,b]} |u(x)| \le C\|u\|_{H^1(a,b)},$$

$$|u(x)-u(y)| \le |x-y|^{1/2}\Big(\int_a^b |\frac{du(z)}{dz}|^2\, dz\Big)^{1/2}, \quad (x,y\in[a,b]).$$

◆同様に, $u \in H^2(a,b) = \{u \in L^2(a,b);\ \frac{du}{dx} \in L^2(a,b), \frac{d^2u(x)}{dx^2} \in L^2(a,b)\}$ とするとき, $u \in C^1[a,b]$ となります. さらに $u \in H^3(a,b)$ なら, $u \in C^2[a,b]$ となっていきます. つまり**ソボレフの意味で高い微分可能性があればあるほど, 普通の意味での微分可能性が復活する（一次分は損をしているが）**という重要な主張なのです!
◆空間 2 次元では, もはや $u \in H^1(D)$ であっても, 一般に $u(x)$ は連続関数と同一視できません. しかし $u \in H^1(D), D \subset \mathbf{R}^2$ なら, 実はどんな $q \ge 1$ に対しても $u \in L^q(D)$ が成り立つというのもソボレフの不等式の一種です. その種のソボレフの不等式に関連して次が成り立ちます.

定理 23

$$\int\int_{\mathbf{R}^2} |f(x)|^2\, dx \le \frac{1}{4\pi}\Big(\int\int_{\mathbf{R}^2} |\nabla f(x)|\, dx\Big)^2, \quad f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2).$$

ここで

$$|\nabla f(x)| = \sqrt{|\frac{\partial f}{\partial x_1}(x)|^2 + |\frac{\partial f}{\partial x_2}(x)|^2}.$$

◆この不等式の定数は最良です! 最良定数にこだわらない場合, 次の不等式は比較的容易に証明されますが, 最良定数での不等式の証明は少し難しいです.

$$\int\int_{\mathbf{R}^2} |f(x)|^2\, dx \le \Big(\int\int_{\mathbf{R}^2} |\nabla f(x)|\, dx\Big)^2, \quad f \in C_0^\infty(\mathbf{R}^2).$$

◆**最良定数での上の不等式から, 等周不等式を導くこと**を見てみます.
D の境界を ∂D で表します. $\epsilon > 0$ に対して, 関数 $f_\epsilon(x)$ を $f_\epsilon(x) = 1,\ (d(x,\partial D) \ge \epsilon),\ f_\epsilon(x) = \frac{d(x,\partial D)}{\epsilon},\ (d(x,\partial D) < \epsilon)$ で定義します. $f_\epsilon(x) = 0\ (x \in \partial D)$ となっていますが, さらに $f_\epsilon(x) = 0\ (x \in \mathbf{R}^2 \setminus D)$ と思って, 先ほどのソボレフの不等式が使えることがわかっています. よって

$$\int\int_D |f_\epsilon(x)|^2\, dx \le \frac{1}{4\pi}\Big(\int\int_D |\nabla f_\epsilon(x)|\, dx\Big)^2.$$

ここで $|\nabla f_\epsilon(x)| = \frac{1}{\epsilon}, x \in \{y : d(y, \partial D) < \epsilon\}$, $|\nabla f_\epsilon(x)| = 0, x \in \{y : d(y, \partial D) \geq \epsilon\}$, となることより,

$$\int\int_D |\nabla f_\epsilon(x)|\, dx = \frac{1}{\epsilon}\int\int_{\{x:\ d(x,\partial D)<\epsilon\}} dx \to L = |\partial D|\ (\epsilon \to 0).$$

一方,

$$\int\int_D |f_\epsilon(x)|^2\, dx = \int\int_{\{x:\ d(x,\partial D)\geq\epsilon\}} dx + \int\int_{\{x:\ d(x,\partial D)<\epsilon\}} (\frac{d(x,\partial D)}{\epsilon})^2\, dx$$

$$\to |D|\ (\epsilon \to 0).$$

したがって, 等周不等式:

$$|D| \leq \frac{1}{4\pi}L^2$$

を得る.

4.2　漸近挙動

◆数列 $f(n), g(n)$ に対して, ある定数 M, N が存在して, $|\frac{f(n)}{g(n)}| \leq M\ (n \geq N)$ が成り立つとき, $f(n) = O(g(n)), (n \to +\infty)$ といい, $|\frac{f(n)}{g(n)}| \to 0\ (n \to +\infty)$ が成り立つとき, $f(n) = o(g(n)), (n \to +\infty)$ といいます（これらはランダウの記号とも呼ばれている). また, $\beta > 0$ があって $\frac{f(n)}{g(n)} \to \beta (n \to +\infty)$ のとき, $f(n) \sim \beta g(n),\ (n \to +\infty)$ とも書きます.

◆例えば, ある $\alpha > 0, a_1 \in \mathbf{R}$ があって

$$n^\alpha(a_n - a) \to 0\ (n \to +\infty)$$

となるとき,

$$a_n = a + \frac{a_1}{n^\alpha} + o(\frac{1}{n^\alpha})$$

と書けて, $a_n \to a\ (n \to +\infty)$ より詳しく a に収束するスピードが $\frac{1}{n^\alpha}$ 程度であるという情報を含んでいます. また, ある $\beta > 0, b_1 > 0$ があって

$$n^{-\beta}a_n \to b_1$$

ならば,

$$a_n = b_1 n^\beta + o(n^\beta)$$

と書けることになります．このとき, $b_1 n^\beta$ を a_n の主要項といいます．$\beta > 0$ は特に, 増大するスピードを決める指数として重要です．さらに精密な漸近公式：$a_n = b_1 n^\beta + b_2 n^\gamma + o(n^\gamma), \beta > \gamma$, が重要な意味を持ってくる問題もありえます．

◆ $\alpha > 0$ に対して,

$$S_n(\alpha) = 1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha$$

としましょう．明らかに, $S_n(\alpha) \to +\infty$ $(n \to +\infty)$ となりますが, そのスピード (増大度) はどのくらいでしょうか？$S_n(a) = 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ を知っていますので, $n^{-2}S_n(1) \to \frac{1}{2}$ $(n \to +\infty)$ となり, よって $S_n(1) = \frac{n^2}{2} + o(n^2)$ となります．同様に, $S_n(2) = 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ なので $n^{-3}S_n(2) \to \frac{1}{3}$, よって $S_n(2) = \frac{n^3}{3} + o(n^3)$. 実は一般に, $S_n(\alpha)$ の具体的な公式を知らなくとも,

$$n^{-(\alpha+1)}S_n(\alpha) = \frac{1}{n^{\alpha+1}}(1^\alpha + 2^\alpha + \cdots + n^\alpha)$$

$$= \frac{1}{n}\Big((\frac{1}{n})^\alpha + (\frac{2}{n})^\alpha + \cdots + (\frac{k}{n})^\alpha + \cdots + (\frac{n}{n})^\alpha\Big) \to \int_0^1 x^\alpha\, dx = \frac{1}{\alpha+1}.$$

したがって,

$$S_n(\alpha) = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + o(n^{\alpha+1}).$$

◆今度は $\alpha > 0$ に対して

$$\zeta_n(\alpha) = \frac{1}{1^\alpha} + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$$

としましょう．

$$\zeta_n(1) = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \to +\infty,$$

$$\zeta_n(2) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \to \frac{\pi^2}{6},$$

$$\zeta_n(3) = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \cdots + \frac{1}{n^3} \to \zeta(3) =?$$

◆ $\zeta_n(1)$ に関して, 不等式

$$\log(n+1) < \zeta_n(1) = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \log n$$

より

$$\frac{\zeta_n(1)}{\log n} \to 1$$

従って $\zeta_n(1)=\log n+o(\log n)$. さらに, $\zeta_n(1)-\log n\to\gamma$ となることがわかるが, この極限値 $\gamma(>0)$ がどういう値かいまだにわかっていません (有理数か無理数かさえも）.
◆スターリングの公式:

$$\frac{n!}{n^{n+\frac{1}{2}}e^{-n}}\to\sqrt{2\pi}.$$

◆素数定理: $\pi(x)$ で x 以下に在る素数の個数と置くとき,

$$\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\log x}}\to 1\ (x\to+\infty).$$

1896 年にアダマールとド・ラ・ヴァレープーサンによって証明. 1850 年には, チェビシェフによる評価不等式：ある $0<C_1<C_2$ が存在して次が成立:

$$C_1\frac{x}{\log x}\le\pi(x)\le C_2\frac{x}{\log x},\ (x\ge 2).$$

4.3　非線形現象と漸近解析

◆非線形光学, 超伝導現象, 数理生態学や材料科学いくつかの非線形現象を記述する非線形偏微分方程式において, 特に**特異摂動問題における解の凝縮現象**を漸近解析で捉える方法が有効であることが 1980 年後半から 1990 年ごろにかけてわかってきて, 現在なお活発な研究が行われています. そこでは, 解の凝縮点のまわりで顕微鏡でものを見るかのごとく, 異なったスケールで解の形状を見ることで凝縮現象の精密な解析が可能となっています.
◆次の非線形境界値問題を考えましょう.

$$-d\Delta u(x)+u(x)=u(x)^3,\ u(x)>0,\ x\in D\subset\mathbf{R}^2,\quad \frac{\partial u}{\partial n}(x)=0,\ x\in\partial D. \tag{4.1}$$

ここで $d>0$ は拡散定数, D は有界な領域, $\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2}{\partial x_2^2}$（ラプラシアンと呼ばれる重要な作用素です）, $n=n(x)$ は $x\in\partial D$ での外向き単位法線ベクトルを表します. $u(x)\equiv 0$ は常に解 (自明な解）ですが, 問題は非自明な解は存在するか？存在するとしてその解の形状は？これは非定数解は空間非一様な解でもあるわけで, パターン形成の問題としても興味をも

たれている問題です. これはまた, 次の時間発展問題の定常解を探す問題でもあります.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\Delta u(x) - u(x) + u(x)^3,\ u(x) > 0,\ x \in D \subset \mathbf{R}^2, \quad \frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0,\ x \in \partial D.$$

定常解は時間無限大での解の挙動を決めるという意味で, 時間発展の現象を探る意味でも, 定常解がどれだけあってどのような性質を持つかを調べることが極めて重要なのです.

◆ 1980 年代後半および 1990-93 年にかけて C.S.Lin, W.M.Ni と高木泉によって, 次のような先駆的仕事がなされました:

定理 24 *(Lin, Ni, 高木)*
(i) $d > 0$ がある程度大きい場合, 解は $u(x) \equiv 1$ しかない;
(ii) $0 < d$ が十分小さい場合, ある境界上の点 $P_d \in \partial D$ にのみ凝縮するような解 $u_d(x)$ が存在する;
(iii)P_d は境界 ∂D の場所のうち, もっとも曲がった場所 (曲率が最大となる点）の近くに位置し, そこではある一定の高さの値をとるが, その点から離れると急激に値が減少するようなスパイク状のプロファイルを持った解となる;
(iv) さらに, $u_d(x) \sim U(\frac{x-P_d}{\sqrt{d}})$, $U(y)$ は次の一意解:

$$-\Delta U(x) + U(x) = U(x)^3, U(x) > 0,\ x \in \mathbf{R}^2,$$

$$U(x) = U(|x|) \to 0\ (|x| \to +\infty), \quad \max_{x \in \mathbf{R}^2} U(x) = U(0).$$

◆ $v(y) = u(\sqrt{d}y)$ とおくとき, $\Delta v(y) = d(\Delta_x u)(\sqrt{d}y)$ より

$$-\Delta v(y) + v(y) = v(y)^3,\ y \in \frac{1}{\sqrt{d}}D$$

となっており, $d \to 0$ で $\frac{1}{\sqrt{d}}D \to \mathbf{R}^2$. $U(x)$ は全空間 $\mathbf{R}^2$ 上での問題でもとの問題の**極限問題**として捉えることができます. この極限問題の解がただ 1 つ存在することは, それ自体も決してやさしいことではなく, 1970 年代から 80 年代後半にかけてようやく解決され, それによって上のような解析も進んだのです.

◆さらに驚くべきことに, 1999 年には Gui と Wei によって, 任意の $K \in \mathbf{N}$ に対して, **半径一定の** K **個の円盤を領域** D **にパッキングする配列**を考えるとき, それらの円盤の各中心の近くに凝縮点を持つような K 個のスパ

イク状形状をもった解の存在が証明されたのです．従って, 例えば $K = 3$ として,

$$u_d(x) \sim U(\frac{x - P_d^1}{\sqrt{d}}) + U(\frac{x - P_d^2}{\sqrt{d}}) + U(\frac{x - P_d^3}{\sqrt{d}})$$

なる漸近的プロファイルをもった多重スパイク解をもちます．そうすると定常解の全体の構造はきわめて複雑なことになるわけです．こんな多彩な漸近的プロファイルを持つ解が存在すること, また数学的にその存在を厳密に証明できるとは, 本当に驚くべきことです．

◆上記の問題はもともと, 1972 年に Gierer と Meinhardt によって提唱された数理生態学における形態形成モデル（ヒドラの頭の生成）を簡略化して出てきたものです．

$$-d\Delta u = \frac{u^2}{v(1 + ku^2)} - u, \ -D\Delta v = u^2 - v$$

$u(x), v(x)$ はそれぞれ化学物質の濃度を表すとされています． $u(x)$ が活性化因子で $v(x)$ は抑制化因子と呼ばれ, 方程式を視てもらえばわかるように, u が増えると u, v の増加を促進し,v が増えると u, v の増加を抑制する効果を持った相互作用をする活性化因子-抑制化因子モデルです．$k > 0$ の場合は飽和効果が入ったモデルで, $k = 0$ の場合は飽和効果を考えないモデルです．活性化因子-抑制化因子モデルでは, $D > 0$ は $d > 0$ に比べて非常に大きいときに, 定数解（空間一様な解）が不安定化し, 安定な非一様な定常解が現れうることを A.Turing が 1952 年に提唱しております．$k > 0$ の場合で $k = O(d^2)$ という弱い飽和効果をもつモデルに対して, Wei-Winter(2004), 倉田-森本 (2008) らの研究がされています．$k > 0$ をパラメータとして動かしていくと, その範囲に応じて対応する安定な定常パターンの変化が数値シミュレーション等で示唆されていますが, まだその全貌は明らかになっておりません．$k > 0$ が小さいときはスパイク状の形状をもった解, しだいにストライプ状形状のをもった解が, さらに大きな $k > 0$ では内部遷移層を持った解などがでてくるのではないかと思います．

◆非線形光学やボーズ・アインシュタイン凝縮現象に現れる非線形モデルに, 次の非線形シュレディンガー方程式（またはグロス・ピタエフスキー方程式）:

$$ih\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{h^2}{2m}\Delta\phi - V(x)\phi + \lambda|\phi|^2\phi = 0$$

があります．$h, m > 0$ は正定数, $V(x)$ はポテンシャルで実数値関数, $\phi(x, t)$ は複素数値関数です．特に $h > 0$ はプランク定数と呼ばれ非常に小さい値

を持ちます. 特に $\phi(x,t) = e^{it\omega/h}u(x)$ という**定在波**と呼ばれる解の存在とその漸近的プロファイルの研究も活発に行われています. このとき $u(x)$ が満たすべき方程式は, (簡単のため $2m = 1$ として)

$$-h^2\Delta u + (\omega + V(x))u - \lambda|u|^2 u = 0$$

$\lambda < 0$ の場合は $-\lambda|u|^2$ が反発ポテンシャルとして働きます. この場合, 特に空間2次元で, $\omega < 0, V(x) = 0$ でも, 零点 ($u(z) = 0$ となる点 z のことで, **ボルテックスを持つ解**とも言います) をもった解が存在します. $\lambda > 0$ の場合は, $-\lambda|u|\ 2$ が自分自身に吸引ポテンシャルとして働き, 解 $u(x)$ の値が大きければ大きいほど吸引力が強くなることから**自己凝縮**を起こしやすくなっています. 例えば $\omega > 0, V(x) \geq 0$ で $\lim_{|x|\to+\infty} V(x) = V_\infty > \min_{y\in\mathbf{R}^n} V(y) = V_{min}$ としましょう. このとき, ある点 P_h に凝縮するような解 $u_h(x)$ が存在し,

$$u_h(x) \sim V(\frac{x-P_h}{h}),\ -\Delta V + (\omega + V_{min})V - \lambda V^3 = 0,\ V(x) > 0,\quad x \in \mathbf{R}^n,$$

かつ

$$V(P_h) \to V_{min}\ (h \to 0).$$

◆上の問題の解は, 例えばソボレフ空間 $H^1(\mathbf{R}^n)$ でのしかるべきエネルギー汎関数の臨界点として, **変分法**によって捕まえることができます. 実は, 上で捕まえた解は, 解の中でも付随する**エネルギー最小の解**を捕まえています. 1970年代あたりから, 鞍点のような臨界点をつかまる**峠の定理**というとトポロジカルな手法が開発され, その手法で捕まえることができるのです. 例えば, 専門著ですが [田中] を参照ください. さらに, 縮小写像の原理とか変分法を組み合わせたより巧妙な方法で, エネルギー最小でない解で上の解と異なった漸近的プロファイルを持つ解も構成法もあって活発に研究されています.

◆変分法は通常, 対応するエネルギー汎関数の最小点とか極小点などを捕まえるのに最も有効な手法です. 例えば, 次のような問題の安定な極小解の構成に有効に活用することができます:

$$-\epsilon^2\Delta u(x) = u(x)(a(x)^2 - u(x)^2),\ x \in \Omega,\quad \frac{\partial u}{\partial n}(x) = 0,\ x \in \partial\Omega$$

で, $a(x) > 0$ がある部分領域 $D = D_1 \cup D_2$ で1の値をとりそのほかの場所では $a(x) \sim \epsilon$ としたとき, 解 $u = u_\epsilon(x)$ で次の漸近的プロファイル ($\epsilon \to 0$ で) を持ったものを構成できます.

$$u_\epsilon(x) \sim 1,\ (x \in D_1),\quad u_\epsilon(x) \sim -1,\ (x \in D_2),$$

かつ, $|u_\epsilon(x)| \leq C\epsilon,\ (x \in \Omega \setminus D)$.
◆また, 変分法は最適化問題などとも関連が深く, 最近でも基本的な楕円型作用素に付随した**固有値最適化問題**も興味がもたれ, 活発に研究されています.
Q1. 太鼓の膜を比率一定の 2 種類の密度の異なる膜で貼り合わせるとするとき, どの貼りあわせ方が最も低い音を出す太鼓を作るでしょうか？
Q2. 数理生態学の魚の個体増殖モデルにおいて, ある一定の割合でよい環境の場所を作ってやるとしてどの場所（魚の住む領域の境界付近とか真ん中付近とか）によい環境の場所を配置するのが魚にとってよいのでしょうか？

終わりに:

高校数学から現代解析学へと題して, 合計 4 回の講座で, 以下に高校数学で学ぶ微分積分学が現代解析学に繋がっているかを鑑賞し, 味わっていただくことが目標でした. 数列の極限や微分積分学の基本定理についてはある程度学んだことを覚えておられる方に, 毎回少しずつ違う視点も交えて現代解析学や微分方程式の流れや感触を味わっていただけるよう願って行ったつもりです. 雰囲気だけを重視した箇所も多く, 味わうという目標には程遠かったかもしれません. せめて, 今回の話や講義ノートを手がかりに, 1 つ 1 つの話題についてもっとゆっくり手を動かしながら味わってみたいと感じていただける部分があれば幸いです.

私自身も少しずつ学びなおしながら, 味わいなおす機会が多いです. 味わい方も人それぞれですし, 理解できた, わかったと思える感覚も人それぞれだと思います. 少しずつ, 自分の味わい方を見つけ楽しんでいただきたいと思います. それだけ楽しめる題材は身近なとことにもたくさんあるように思います.

この講座を担当させていただき, 準備していく中で, 自分自身が味わいなおした題材もいくつかあります. 講座にお付き合いいただきありがとうございました. 毎回, 皆様の真剣な聴講に身が引き締まる思いでこの期間を過ごさせていただきました. 参加された皆さん全員に感謝申し上げます. また, このような機会がありましたら, お会いできたらうれしいです.

参考文献:

[笠原] 微分積分学、笠原皓司著、サイエンス社.
[ハイラー] 解析教程（上・下）、ハイラー・ヴァンナー著、Springer.
[州之内] フーリエ解析とその応用、洲之内源一郎著、サイエンス社.
[神保] 微分方程式概論、神保秀一著、サイエンス社.
[堤] 偏微分方程式論, 堤誉志雄著、培風館.
[ブレジス] 関数解析, H. ブレジス著, 産業図書.
[黒田] 関数解析、黒田成俊著、共立出版.
[溝畑] 解析学小景、溝畑茂著、岩波書店.
[薩摩] 物理と数学の 2 重らせん、薩摩順吉著、丸善.
[志賀] 無限からの光芒、志賀浩二著、日本評論社.
[猪狩] 実解析入門, 猪狩著, 岩波書店.
[今吉] 複素関数概説、今吉洋一著、サイエンス社.
[キーナー] キーナー応用数学（上・下）、キーナー著、日本評論社.
[ヨスト] ポストモダン解析学, ユルゲン・ヨスト著, シュプリンガー・フェアラーク東京.
[増田] 非線型数学, 増田　久弥著, 朝倉書店.
[木上等] カオスとフラクタルの数理, 木上・畑・山口著, 岩波応用数学講座.
[数理科学 1]「数理科学」- 現代の不等式-, 1995 年 8 月号, サイエンス社.
[数理科学 2]「数理科学」- 現象を視る-, 2008 年 1 月号, サイエンス社.
[高橋] 漸近挙動入門, 高橋陽一郎著, 日本評論社.
[山口] 非線型の現象と解析, 山口昌哉編著, 日本評論社.
[柳田] 爆発と凝集- 非線形・非平衡現象の数理・第 3 巻, 柳田英二編著.
[金谷] これならわかる応用数学教室, 金谷健一著, 共立出版.
[竹中] 数学からのトピックス, 竹中淑子著, 培風館.
[蔵本] 非線形科学, 蔵本由紀著, 集英社新書.
[シン] フェルマーの最終定理, S. シン著, 新潮文庫.
[田中] 非線形問題 2 -変分問題入門-, 田中和永著, 岩波書店.
[村田・倉田] 楕円型・放物型偏微分方程式, 村田實・倉田和浩共著, 岩波書店.