”まっすぐ”と最短経路
-”直線”, ビリヤード, ネットワーク-

倉田　和浩

”まっすぐに歩く”とはどういうことでしょうか？日常生活で, まっすぐに帰ってきなさい, と言われるときは, ふつう寄り道しないで最短コースで帰ってきなさい, という意味で使われるのではないでしょうか. ”まっすぐ”ということに対して数学的にはまず”直線”を連想する人も多いでしょう. でも, 我々の住んでいる地球は丸くて曲がっています. 我々はふだん曲がっている地面の上を”まっすぐ”歩いているつもりでいますが（？）どういうことでしょうか？

ここでは, ”まっすぐ”歩くということを, ”最短コースで”歩くこと, という見方でいくつかの現象を見つめてみたいと思います.

1　曲がった曲面の上での”直線”(最短コース) とは？

平面上の２点 P と Q を結ぶ（ありとあらゆる）経路のうち最短のものは, ２点 P, Q を通る直線（線分）であることはよく知っているでしょう.

問題 A 1: では, 円柱面の上をはいまわる”あり”にとって（森の中の切り口が円であるような大木の上をはいまわる”あり”を想像していただいて）, 円柱面上の点 P から出発して, 別の点 Q までたどり着くための最短コースは何でしょうか？

問題 A2: 地球は球面のように丸い. 地球がまったく球面と同じと見なして, 地球上を歩く我々にとって地球上の点 P から出発して, 別の点 Q までたどり着くための最短コースは何でしょうか？

曲がった曲面の上を歩く生物にとって, 曲面上の２点を結ぶ経路のうち

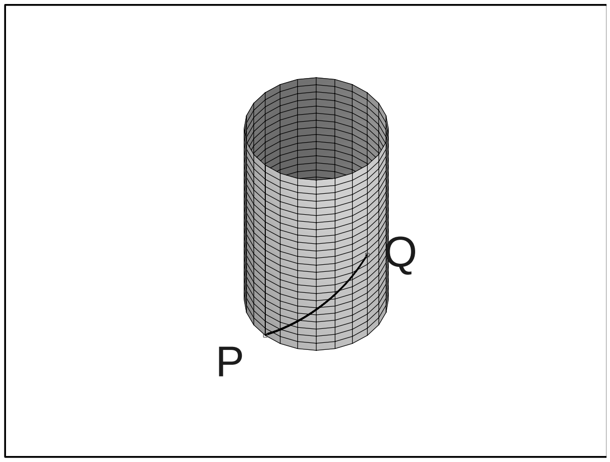

図 1: 円柱面上の 2 点 P, Q を結ぶ最短経路は？

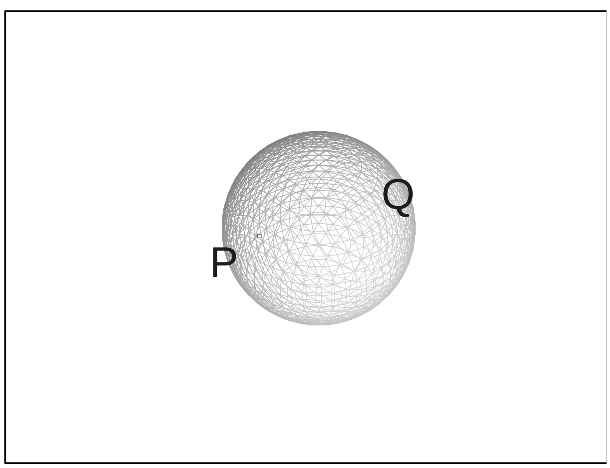

図 2: 球面上の 2 点 P, Q を結ぶ最短経路は？

最短であるものを選ぶことが, 寄り道しないで”まっすぐ”に歩くことである, といえるのではないでしょうか. そうした最短であるような経路は, この曲がった曲面の上での”直線”といってよいかもしれません.

ここで, ２点 P と Q を結ぶ経路を最短にするものは何か？と問いかけましたが, 最短というからには長さが最も短いというわけですが, そもそも”長さ”とは何でしょうか？という疑問にぶちあたります. もちろん, 平面上の線分の長さはよくわかっていますが, 曲がった経路の”長さ”とは？そう考えると, 当たり前！といった**平面上の２点 P, Q を結ぶありとあらゆる経路のうち P, Q を結ぶ線分からなる経路が最短である**, ということもなぜか？という気になりませんか. 実は, 正確に経路の”長さ”とは何か？に答えるのは少し難しいといえば難しいのです. ここでは, 経路の”長さ”とは, 経路を細かく分割して, 分割ごとにできる経路上の分点を隣り合うもの同士つないでできる**折れ線の長さ**を考え, 分割を限りなく細かくしていったときの折れ線の長さの極限値として経路の”長さ”が定まると理解しておきましょう. 従って, 分割が非常に細かいときの折れ線の長さは考えている経路の長さに極めて近い（**折れ線近似値**という) ことになります.

• 以上のことをもとに, **平面上の２点 P, Q を結ぶありとあらゆる経路のうち P, Q を結ぶ線分からなる経路が最短である**, ことは, 平面上の３角形 P, Q, R があるとき

$$PQ < PR + RQ$$

が成り立つ（三角不等式ともいう) 事実から納得できることになるのです. (説明は講演で行います.)

• 上の事から, **円柱面上での最短経路は”らせん”経路である**こと（少なくとも円柱面上の１点の近くではですが）もわかります.(説明は講演で行います.) ただし, まっすぐ上に向かって歩く直線経路も最短経路を与えます.

• 球面上の２点 P, Q を結ぶ最短経路は, P, Q と中心 O を通る平面できった切り口でできる円（大円という) から決まることもわかります.（平面上の最短経路の際と似た考え方で, 講演で説明補足するかもしれません.)

以下の問いについて, 考えて**体験・実験**してみましょう!

問-a: 円柱型のろうそくに紙を巻きつけて, 斜めからスパッとカッターで切ると切り口は楕円であることは知っていると思いますが, この巻きつ

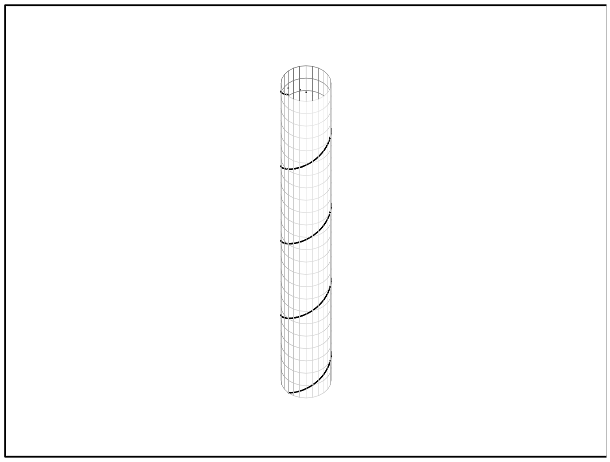

図 3: 円柱面上の"直線"はらせん曲線

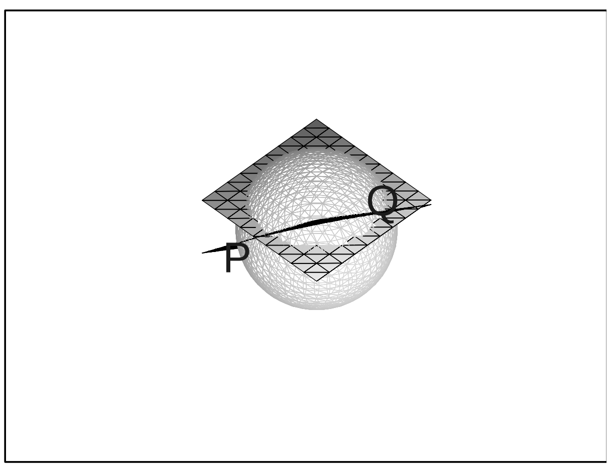

図 4: P, Q を結ぶ大円

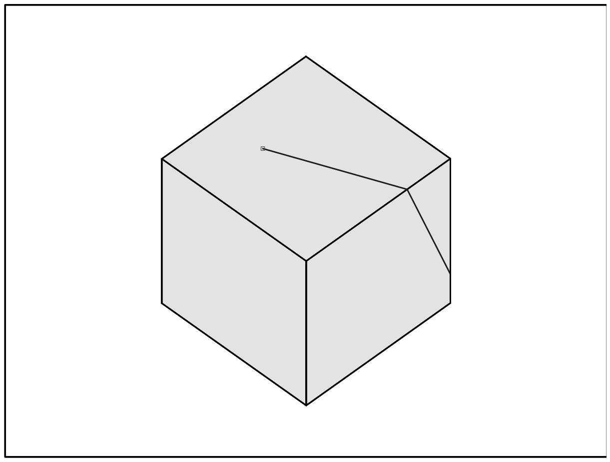

図 5: ”あり”の選ぶ最短経路は？

けてあった紙を平面上に広げたときの先ほどの切り口はどのような曲線となるでしょうか？

問-b: 一辺が 1 の立方体の上をはいまわる”あり”がいるとします．（ありが立方体のどこかの面にえさがあるかどうかをチェックするために），立方体のある面の上（さらに面の内部にいるとする）にいる”あり”がすべての面を通って, 元の場所にもどってくるとして, その最短経路とその長さは何でしょうか？

問-c: 地球儀を使って, 地球上の 2 点の最短経路を見てみましょう. (球面上では, 平面上での直線にあたるものが”大円”です. 従って, 3 つの大円で囲まれる図形が球面上の”三角形”といっていいでしょう.　球面上の”三角形”の内角の和は必ず 180 °より大きい, など平面上の三角形とは異なる性質を持っていることもわかります.)

2　ぶつかりながらの最短コース (ビリヤード問題)

話を平面の上に戻しましょう.

問題 B1: 川べりが直線状になっている箇所で, A 地点にいる馬をつれた人が川で水を飲ませてから B 地点にある家に最短コースで戻りたいと思います. どこに向かって歩き始めればよいでしょうか？

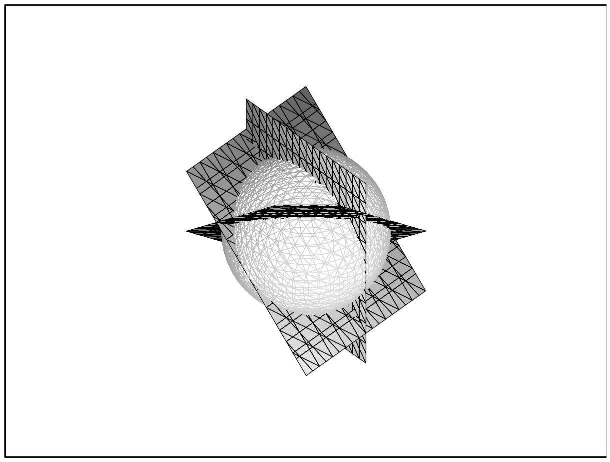

図 6: 球面上の”三角形”

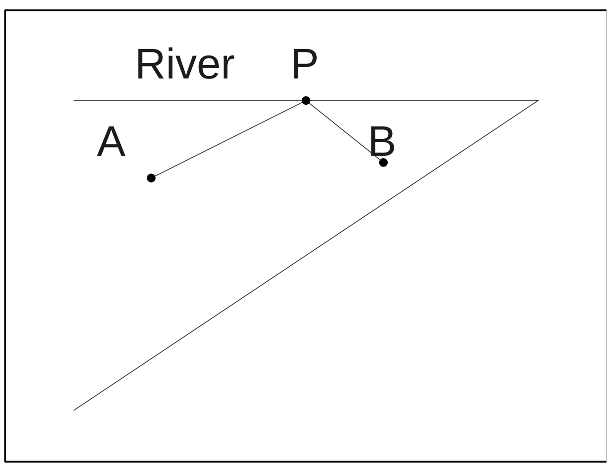

図 7: 最短経路は？

川に立ち寄らずに B 地点の家に向かうのであれば, もちろん直線コースをとればいいでしょうが, いったん川に水を飲みに立ち寄らなくてはならないという制限がついています. そうした**制限のもとでの最短経路を見つける問題**です. これは**鏡映**という考え方を用いれば解決することがわかります. すなわち, 川べりを表す直線を L として点 B と L に関して対称な点を B'(点 B の**鏡映点**ともいいます) を考えましょう. すると, 人がいったんこの川べりの地点 P に立ち寄って B 地点に戻るとするときの経路の長さは $l = AP + PB$ となります. このとき $PB = PB'$ であることに注意しますと $l = AP + PB'$ でもありますね. このことから, 2 点 A, B' を結ぶ経路のうち最短のものは, APB' が一直線上にあるときであり, このときに限ることがわかるでしょう. 従って, そのときの P を P' とすると, 人が川べりの地点 P' に向かって歩くのがよいことになるわけです. このとき, 直線 L と AP' とのなす角度と直線 L と BP' とのなす角度とは等しいこともわかります. つまり, あたかも光が直線 L のところにぶつかって反射して B 地点に到達するための光の経路と同じであるのです (**反射の法則**といいます).

これは, **ビリヤードの原理**と同じです. ビリヤードの玉は壁において入射角と同じ角度で反射するわけです.

問題 B2: 長方形状のビリーヤード台があるとしましょう. 図のような位置に 2 つの玉 A, B があるとします. 玉 A を突いて, 3 回壁にぶつかって B に当てるにはどの方向に突けばよいのでしょうか？(ここで玉 A, B の大きさは無視するものとしましょう. そうしないと, ビリヤード台の大きさとか, 玉の大きさとか気になりますし, ぶつかるといっても真芯にあたる状況から, かすかにかする状況まで, さまざまになってしまうからです.)

• これは, 長方形ビリヤードを次々に鏡映してできる長方形の集まりを考えると, こうしてできる大きな長方形状での直線経路と対応するビリヤードの軌道とに対応つけすればよいことがわかるのです. (講演で実践してみます.)

いったんこの原理を理解できたら, さまざまな問いかけを考えて, ビリヤードの軌道の仕組みを楽しむことができます. それらのうちの, いくつかを問いかけてみましょう.

問-a:四隅にのみ穴（ポケット）がある長方形ビリヤード台を考えます.

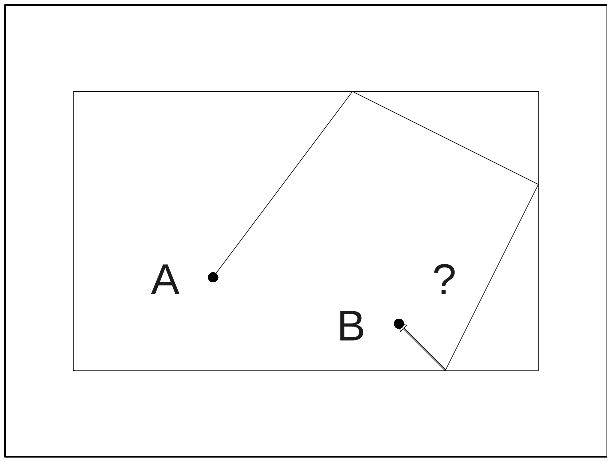

図 8: 長方形型ビリヤードの軌道

この上で, 玉 A をついて（障害となるぶつけてはいけない玉がいくつかあるなどのため）まずは何回か壁にぶつけたあとに玉 B にぶつけてその玉 B を四隅の穴に入れるための突く方向（あるとして）はどのように決めるとよいのでしょうか？

問-b:縦横の長さ m,n（ただし $m \neq n$) がともに整数である長方形のビリヤード台を考えましょう．今, 四隅のうちの一点から角度４５度で玉を突くと, 必ず有限回だけ壁にぶつかってまたもとの隅にもどるといいます. なぜでしょうか？本当でしょうか？$m=5, n=3$ とかでまずはやってみるといいでしょう？角度３０度で突くと, 無限回ぶつかってもどこの隅にもぶつからないといいます．本当でしょうか？(後半の問いかけは少し難しいかもしれません.)

問-c: 円形のビリヤード台のときはどんなことが起こるのでしょうか？また, 三角形のビリヤード台ならどうでしょうか？

さらには, 楕円形では？運動場トラックの形状では？など一般の形をしたビリヤード台でのビリヤードの軌道がどうなるかという問題も考えられますが, かなり難しい問題も含まれています．例えば, 突いた玉が有限回数だけ壁にぶつかってまた元の位置に戻って, それ以後最初と同じ軌道を描くとき, **周期軌道を描く**といいます．いつこのような周期軌道が存在するのでしょうか？またどのくらいたくさん異なる周期軌道が存在するのでしょうか？などという問いは興味深い問いの１つですが, 一般に難し

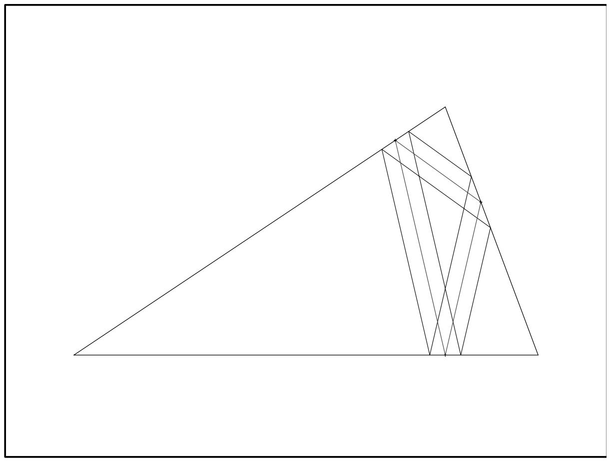

図 9: 三角形型ビリヤードの周期軌道

い問題です.

問-d: 半直線 XO と YO で囲まれた三角領域に馬を連れた人が A 地点にいるとします. XO 側には川があり, YO 側には草原があるとします. 馬に水をのませ, 草を食べさせてから B 地点にある家に戻りたいと思います. どういう経路で進めばいいのでしょうか？

3 最短ネットワーク問題

問題 C1: 図のような平面上の 3 地点 A, B, C を結ぶ最短の光ネットワークケーブルを張りめぐらせたいと思います. どうすればいいのでしょうか？ただし, 途中のどこかに中継点をいくら設けてもよいものとします.

これは, **指定された点をすべてつなげるという制限を設けての光ケーブルの全長を最短にする問題**であり, 経路が長いと建築にかかる費用が高くなるのでなるべく安くでできる最適なネットワークの張りめぐらせ方を探す問題です. 問題は単純ですが, 実用上にも重要であることはわかるでしょう. 中継点を設けずに, 最初に指定した地点同士を結ぶ経路しか考えないという問題設定もありえますが, 中継点をいくら設けてもいいことが問題をより難しくしています.

これを地点の数を一般にした次の問題も考えられ, 一般に**最短ネット**

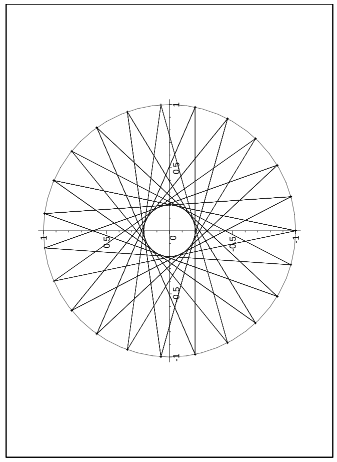

図 10: 円形型ビリヤードの周期軌道

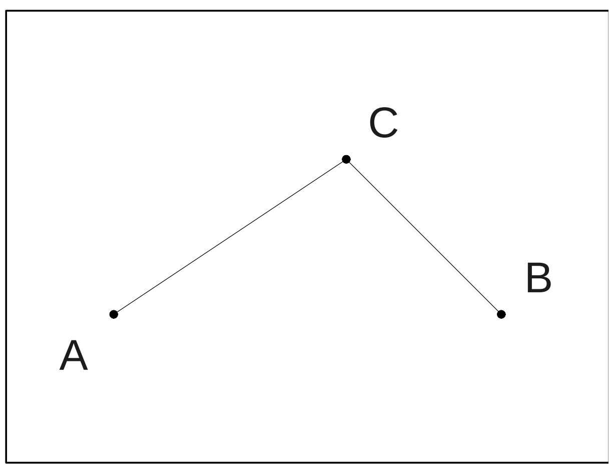

図 11: ３地点を最短で結ぶネットワークは？

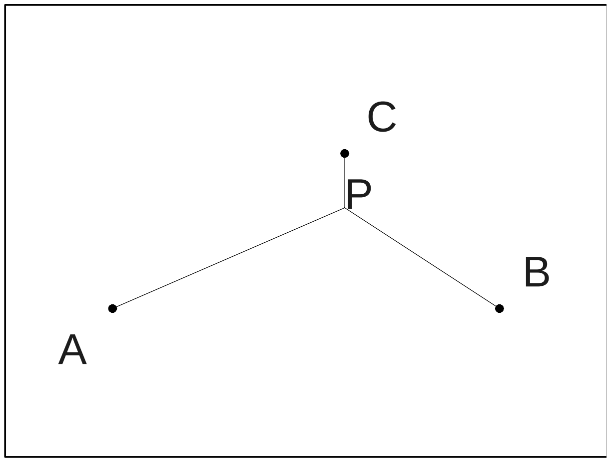

図 12: ３地点を結ぶ最短ネットワーク

ワーク問題（あるいは**シュタイナー問題**）と呼ばれています.

問題 C2: 図のような平面上の n 個の地点 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ を結ぶ最短の光ネットワークケーブルを張りめぐらせたいと考えます. ただし, 途中のどこかに中継点をいくら設けてもよいものとします.　どうすればいいのでしょうか？

• ３地点のときの考察と最短ネットワークの作図法について学びます. (講演で少し詳しく説明します.)

• ４地点のときの考察と最短ネットワークの作図法についても考えます（３地点のことがわかれば, 比較的簡単かもしれません？言われてみればですが.）

• ５地点では？n 地点では？一般には, かなり難しい問題です.

• **石鹸膜の実験**が最適ネットワークを教えてくれる!ということを考えた人がいます. 透明な２枚の板に支柱を垂直に何本か立てます. それを石鹸水につけて持ち上げて, 上から見ると支柱を結ぶ最短ネットワークが見える！というのです. 石鹸膜は表面張力によって面積最小になるような膜の張り方をします. 板に垂直な方向については垂直な平面となろうとするので, 支柱をまんべんなく張るためには上からみた図はネットワークの経路が最短になるよう選択することになるわけです.　実験してみたくなりませんか？

問-a: 与えられた３点, 4 点に対して, コンパスと定規を使って最適ネットワークを作図してみましょう.

問-b: 3,4,5 点の最適ネットワークを石鹸膜の実験をやってみましょう!

4　最適化問題, 変分問題の視点で現象を見る

曲がった曲面の上の最短経路の問題, 一般の形をしたビリヤード台におけるビリヤードの軌道の問題, 一般の個数の点を結ぶ最短ネットワーク問題, それぞれにいまなお興味深い現象を追いかけて研究が続けられており, 個々の面白さ・魅力ある話題です.

特にここでは, 結局 **さまざまな制限のもとでの経路の長さを最短にする問題**を見てきたといえるでしょう. より一般的にいって, **ある条件のもとでのある量（現象に付随したエネルギーとか）を最小にする (さらに一般に極小にするとか）とか最適にするといった問題の一群**があります.
それらは, **変分問題**とか**最適化問題**とよばれる問題の一群です.
１つ有名な例を紹介しておきましょう.

問題 D: 平面上の長さ一定 (L) の縄で囲む面積 (S) を最大にするにはどういう囲みかたをすればいいのでしょうか？. あるいは, 縄である一定の面積を囲むのに縄の長さを最短にするにはどうすればいいのでしょうか？ (**等周問題**と呼ばれる有名な変分問題です.)

問: シャボン玉の実験で等周問題の解を見てみましょう! 先ほどの板に挟まれた領域にシャボン玉を入れてみると, シャボン玉の内部の体積を一定にして表面積が最小になるような膜の張り方をしたがります. その状態から, ストローでシャボン玉の中の空気を吸い込んでシャボン玉の内部の体積をだんだん小さくしてみるとどうなるのでしょうか？

その他にも, 次のような問題もあります.　以下の問題については数学としてどういう定式化するのかわかりにくいかもしれませんが, 上の等周問題と似たような性質の変分問題であったり最適化問題であるといえます.

• 面積一定のさまざまな形の太鼓を考えたとき, 最も低い音を出す太鼓の形はどういう形でしょうか？

• 一定の形をした太鼓を材質の異なる２種類の膜で貼ることにします. ２種類の膜の比率が定まっているときに, ２種類の膜をどういう貼り付け

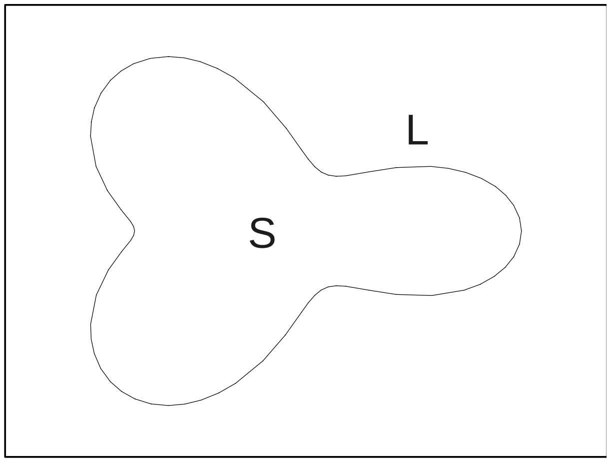

図 13: 等周問題

方をすれば最も低い音のでる太鼓が作れるのでしょうか？

参考図書:

[1] 「数学スナップショット」(H. シュタインハウス著), 紀伊国屋書店 (1957).

[2] 「離散数学入門」(秋山仁, Graham 著), 朝倉書店 (1993).

[3] 「形の法則-自然界の形とパターン-」（ヒルデブラント・トロンバ著）, 東京化学同人 (1994).

[4] 「幾何学１２章」（難波誠著）, 日本評論社 (2000).

[5] 「幾何学と群」(ニクソン・シャファレヴィッチ著) シュプリンガー・フェアラーク東京 (1993).