# 解析学を通して見る数理現象

2004 年 8 月 26-27 日

首都大学東京都市教養学部理工系・数理科学コースオープンラボ

倉田和浩

私のホームページも参照ください:
http://www.comp.metro-u.ac.jp/ kurata/index.html
E-mail:kurata@comp.metro-u.ac.jp
Tel:0426-77-2459(研究室直通）

「数理現象」という言葉は造語かもしれないが, 自然現象にあらわれる数理的構造もあれば, 数学的対象に内在する数理的構造もある.

そもそも, 自然現象などにあらわれる興味深い現象の数理的構造の解明が解析学の主要テーマである. しかし, 数論のような数の世界に内在する数理, 曲線, 曲面などのものの形の世界に内在する数理に対しても, 解析学の視点は重要な役割を果たす.

解析学において特徴的なのは有限と無限との比較において, **無限を扱う学問**である, ということである. 必然的に**無限次元の問題**が現れるということもあるし, **極限を見る**ことでその数理構造がよく見えてくるという視点でもある.

以下, そうした解析学の視点のもとに

1. 「**無限をとうして見る**」
2. 「**無限次元問題にあらわれる数理現象**」
3. 「**自然現象の数理モデルと微分方程式**」

という順に, 大学１年生レベルの話しから専門的な話題まで（研究レベルの問題も含めて。。)、いくつかの典型例を雑多にならべ、それをとうして言いたいことを伝えてみたい.

それら**数理現象**の中に見える**不思議**, **驚き**, **おもしろさ**を味わってほしい.

# 1 無限を通して見る

## 1.1 例 1:数列の極限、増大度、漸近挙動

### 1.1.1 リーマンのゼータ関数

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^s} = 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots$$

は**リーマンのゼータ関数** ($s$ の関数として）と呼ばれる. 次のことが知られている.

$$\zeta(1) = +\infty,$$

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6} \text{ (オイラー)}$$

また、$s > 1$ に対して, $\zeta(s)$ は実数として確定する.

**問題**：$\zeta(3) =?$ この値が何であるか, 不思議なことに実は今だに世界中の誰も知らないのである. 値どころか, この値は無理数であることすら 1978 年にアペリという人によって初めて証明されたというのである. 一方で, $\zeta(4) = \pi^4/90$ はわかってたりするのである. 一般に,$s$が偶数ならその値はわかっている.

### 1.1.2 増大度

$$1 + 2 + 3 + \cdots \to +\infty, 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots \to +\infty$$

ですね. では、その違いは??

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2} \to \frac{1}{2}\ (n \to +\infty),$$
$$\frac{1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2}{n^3} \to \frac{1}{3}\ (n \to +\infty),$$

となります. このことは、2つの数列

$$a_n = 1+2+\cdots+n,\ b_n = 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2$$

は $n \to \infty$ でともに無限大となるのであるが, $a_n$ はほぼ $n^2/2$ 程度のスピードで, $b_n$ はほぼ $n^3/3$ 程度のスピードで無限大となるのであって、$a_n$ より $b_n$ の方がよりはやく無限大に近づくということを表現していますね. 別の言い方をすれば, $a_n$ より $b_n$ の方の**増大度が大きい**といいます. こうした考え方で同じ無限大に増大するものでも区別してその特徴を浮き彫りにすることができるわけで、現代数学でもとても大切な考え方です. また $a_n$ は漸近的に $n^2$ のオーダーで増大する, といった表現もします.

$a_{500}$ と $b_{500}$ とをみて, その値が何になるかに注目するのではなく, $n$ が十分大きいときの振る舞い（**漸近挙動**という）を比べてみることで両者の違いを浮き彫りにできたのです. つまり, 極限（漸近挙動）をみることで違いをみることができたわけです. もちろん, $a_n < b_n$ という違いはすぐにわかるわけですが、無限大にちかづくスピードの違いを浮き彫りにしたわけです.

ちなみに先ほどの極限値は, 高校で

$$1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2},\ 1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

を習ったことのある人なら, それはそうだ！と思いますね. では、

**問題:**

$$\frac{1^{99}+2^{99}+3^{99}+\cdots+n^{99}}{n^{100}} \to ?,$$

一般に勝手な自然数 $k$ に対して

$$\frac{1^{k}+2^{k}+3^{k}+\cdots+n^{k}}{n^{k+1}} \to ?,$$

は有限値として定まる？その値は？（答えは $1/(k+1)$) 積分論における**区分求積法**の１つの応用として求まる.

### 1.1.3 素数定理

$\pi(x)$ で $x$ 以下にある素数の個数を表わすとする. 「素数は無限にある」ことはしっていますね. 従って

$$\pi(x) \to +\infty (x \to +\infty)$$

です. さて, どのような増大度をもつのでしょうか ?? 次の答えは,1793 年ガウス（当時１５歳）によって予想され, 1896 年にアダマールらによって証明されたものである. おそるべし１５歳！

**素数定理**

$$\frac{\pi(x)}{\left(\frac{x}{\log x}\right)} \to 1 \ (x \to +\infty)$$

***「**数学実験 2**」

### 1.1.4 $\cos(\cos(\cos(\cos(\cdots(\cos x))))) \to ?$

なにやら, 奇妙な問いかけも次のように見ることができるとわかりやすくなる.

$$x_{n+1} = \cos(x_n)$$

で帰納的に定められる数列 $\{x_n\}$ に対して $x_n$ は収束するのだろうか？するとしてその極限値はなに？

*** 「**数学実験 2**」

## 1.2　例 2:Logistic Map に見られるカオス的現象

離散的な時刻 $t_n = n\Delta t, n = 1, 2, 3\cdots$ における生物個体数を $a_n$ で表わすものとする．その単位時間 $\Delta t > 0$ における個体数の増加が

$$\frac{a_{n+1} - a_n}{\Delta t} = (k - Ka_n)a_n$$

という法則によって定まるとする．ここで, $k, K$ は正の定数とする．これを個体増殖のロジスチックモデルという．このとき,

$$A = \frac{1 + k\Delta t}{K\Delta t}, x_n = Aa_n$$

とおくと,

$$\lambda = 1 + k\Delta t$$

として, 次の漸化式を得る.

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n), n = 1, 2\cdots$$

**問題**：$\lambda > 0$ を与えられた数としたとき、初期値 $x_1$ から出発してできる数列 $\{x_n\}$ に対して、$n \to +\infty$ で $x_n$ はどういう挙動をするのだろうか？

***「**数学実験 1**」

### 1.3　例 3:縮小写像の原理

**問題：**ここに首都大学東京の南大沢キャンパスの地図とその縮小地図がある．縮小地図をどう傾けてもいいが，もとの地図の上に収まるように貼りつけたとしよう．この時，地図の中の地点で、元の地図でも縮小地図を貼りつけたものでもその位置がちょうど重なるような点（**不動点**と呼ぶ）が存在するだろうか？

あるとして、どうしたらそのような点を見つけることができるか？$D$で,元の地図に対応する平面領域とし，$x \in D$に対して，$y = f(x) \in D$で，地点$x$の貼りつけられた縮小地図上での点に写す写像とする．このとき，$f(x) = x$となるような点$x \in D$を$f$の不動点といい，上の問題の不動点に対応する．

実は，勝手な点$x_0 \in D$を選んで，

$$x_{n+1} = f(x_n), n = 0, 1, 2, 3 \cdots$$

として，点列$\{x_n\}$を作ると，常に$x_n$は$n \to +\infty$において，ある点$y \in D$に収束することが証明され，その極限点$y$が求めるただ１つの不動点となるのである．

この極限操作で不動点が自動的に浮き彫りになる様子を実感してほしい．

***「**実験∗**」

これには，「縮小写像の原理」という数学の定理がかかわっている．縮小写像の原理は，**不動点定理**といわれるものの１種である．縮小写像の原理をはじめ不動点定理は非線形現象の解析においても現在においてもとても大切な方法論として役立っている．

## 1.4 例 4:関数を基本的な関数の和で表現する

「テイラー展開」と「フーリエ展開」

### 1.4.1 テーラー展開

滑らかな関数を多項式の無限和で表現するもの.

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots,$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

など. この表現を元に, 実数 $x$ に対して, $i$ を虚数単位として ($i^2 = -1$)

$$e^{ix} = 1 + (ix) + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \cdots$$

と定義してみると,

$$e^{ix} = \cos x + i(\sin x)$$

という関係式ななりたつことになる. これを**オーラーの公式**という. 複素数の世界に広がって, **複素関数論** (複素数値関数に対する微分積分みたいなもの）までいくと指数関数と 3 角関数の意外な関係が見えてくるのである.

### 1.4.2 フーリエ展開

周期 $2\pi$ の任意の関数を

$$1, \cos x, \cos(2x), \cos(3x), \cdots, \sin x, \sin(2x), \sin(3x), \cdots$$

という周期$2\pi$を持った基本的な関数の無限和で表現するのがフーリエ展開. 1822年にフランスの数学者フーリエによって考えられたものである.

**例1** $[-\pi,\pi]$上で$f(x)=(1/2)(\pi-x)$ $(0\le x\le\pi)$, $f(x)=(1/2)(x+\pi)$ $(-\pi\le x\le 0)$ を$2\pi$周期で拡張して$2\pi$周期関数とみなすとき,

$$f(x)=\frac{\pi}{4}+\frac{2}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{(2m-1)^2}\cos(2m-1)x$$

が成り立つ. 特に, $x=0$とすれば

$$\frac{\pi^2}{8}=1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots$$

が得られる.

**例2** $g(x)=x^2(-\pi\le x\le\pi)$ をフーリエ展開すると

$$g(x)=\frac{\pi^2}{3}+4(-\cos x+\frac{1}{2^2}\cos(2x)-\frac{1}{3^2}\cos(3x)+\cdots).$$

とくに$x=0$として,

$$\frac{\pi^2}{12}=1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots$$

を得る.

例1, 2の結果から,オイラーの得た表現

$$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

が得られる.

# 2　無限次元問題にあらわれる数理現象

## 2.1　例 1:等周問題

**問題：**長さ一定 $L$ のロープで平面上の領域 $D$ を囲う．領域 $D$ の面積 $S$ を最大にするにはどう囲えばよいか？

ロープの囲み方はさまざまで, 実は無限の自由度がある．ロープの囲み方を表わす曲線をパラメータ表示して

$$(x(t), y(t)),\ 0 \leq t \leq L$$

とする．$(x(t), y(t))$ は曲線上の１点から長さ $t$ 進んだ曲線上の点を表わす．　$x(t), y(t)$ は周期 $L$ のなめらかな関数（適当に折れ曲がっていてもいいが。。）という以外ありとあらゆるものを考えることに注意しよう．これは**無限次元の問題**である．よりはっきりさせるには, 簡単のため $L = 2\pi$ として、フーリエ展開によって, 任意の周期 $2\pi$ の関数 $x(t)$ は

$$x(t) = a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos(2t) + a_3 \cos(3t) + \cdots$$

$$+ b_1 \sin t + b_2 \sin(2t) + b_3 \sin(3t) + \cdots$$

と無限和で表現されることから見ることもできる．$x(t)$ と, その係数 $\{a_0, a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots\}$ とが１対１にも対応する．$x(t)$ の任意性が無限個のパラメータ $\{a_0, a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots\}$ の任意性に表現されなおされたのである．

面積 $S$ を積分表現をとうしてそれらのパラメータで表わし, どのパラメータのときに面積最大となるかを議論できるようになる．その結果, 実は**最適な囲み方は円である**ことがわかることになる．

## 2.2　例 2:太鼓の音と Faber-Krahn の不等式、最適化問題

問題： 面積一定の太鼓でその (平面上での）形状をありとあらゆるものを考えて, 最低音をだすような太鼓をつくるにはどういう形状の太鼓を作ればいいか？

太鼓のだす音ということの数学的定式化をしなくてはならないが, これは**最適化問題**の１つでもっとも有名な問題である．何かを最適になるようなものが本当に実現するか？実現することが保証されたとして, 最適解はどのようなものになるか？

## 2.3　例 3:関数空間と完備性、単位球のコンパクト性の崩れ

### 2.3.1　関数空間と完備性

$[0,1]$ 区間上の連続関数全体のなす集合を $X$ とする．$X$ ではその１つの元が関数であることに注意しよう．１つの関数を集合 $X$ の中の１つの抽象的な点と考えるのである．これは, 現代解析の重要な考え方で, $X$ を**関数空間**という．実数全体のなす集合 $\mathbf{R}$ の元は, 実数であり、２つの実数 $x, y$ の距離は $|x-y|$ で表現される.

関数空間 $X$ 空間の２つの元 $f, g$(従って, $f, g$ はそれぞれ $[0,1]$ 区間上の連続関数であって, $f(x), g(x)$ とも書くべきであるが, 抽象的な元として表わす場合には, 単に $f, g$ とかく）を考えるとき, $f$ と $g$ の距離を測ることができるか？距離といっても、今度の場合距離ってなにか？それすらが問題となるであろう. 距離といってふさわしいと思われる基本的性質を持ったもの：

(1)

$$d(f,g) \geq 0 \ (f,g \in X)$$

であって, $d(f,g)=0$ であることと $f=g$ であることこが同

値でること;

(2)
$$d(f,g)=d(g,f);$$
(3)
$$d(f,g)\le d(f,h)+d(h,g)\ (f,g,h\in X)$$
という 3 つの性質をもつ関数 $d(\cdot,\cdot)$ を**距離**と呼ぼう.

実は $X$ には, さまざまな距離を定義することができる. その中でも, **完備性**をもったものが現代解析では重要である. : すなわち, $\{f_n\}\subset X$ を $X$ の点列（実際はこの場合関数列であるが）として
$$d(f_n,f_m)\to 0\ (n,m\to+\infty)$$
を満たすならば, ある元 $f$(実際は関数 $f(x)$) が存在して
$$d(f_n,f)\to 0\ (n\to\infty)$$
が成り立つ, というとき $X$ は距離 $d(\cdot,\cdot)$ の下で完備性をもつという. このとき,$X$ は**完備な距離空間**であるという. 縮小写像の原理はこうした完備な距離空間でなりたつのである.

### 2.3.2 単位球のコンパクト性の崩れ

高校でも学んだように $[-1,1]$ 区間上の連続関数は最大値および最小値をもつ. $[-1,1]=\{x||x|\le 1\}$ でもあるから, これは 1 次元空間 $\mathbf{R}$ の原点を中心とした 1 の”単位球”とみなせる. 無限次元距離空間においては, その単位球
$$B=\{x\in X|d(x,O)\le 1\}$$
上の連続関数であっても, 一般に $B$ 上で最大値をとらない. こういう現象を無限次元空間での**単位球のコンパクト性の崩れ**

という. **コンパクト**という性質は, 現代数学において極めて重要であり, 逆にそのコンパクト性が無限次元問題では成り立たない, というところに無限次元問題の難しさがある.

### 2.4 例 4:石鹸膜の数理と変分問題

針金でわっかをつくって, それを石鹸水につけてあげると石鹸膜で貼られた曲面が得られる. それは, 表面張力の影響で面積最小になるよう形づくられる. このように, 針金を張るという制限の下で面積を最小にするという**変分原理**はさまざまな現象を支配する. そうした変分原理に従って起こる現象の数学定式化のもとでその最小解（一般には, 対応するエネルギー汎関数の臨界点が, 定常状態に対応するもの）を研究するのが変分問題の研究である.

# 3　自然現象の数理モデルと微分方程式

## 3.1　例 1 (生物個体増殖モデル)

拡散効果をとり入れたロジスチック方程式

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \lambda u(x,t)(a(x) - u(x,t)),\ x \in (0,1), t > 0,$$

境界条件：

$$u(0,t) = 0,\ u(1,t) = 0\ (t \geq 0),$$

初期条件：

$$u(x,0) = \phi(x)\ (x \in [0,1]).$$

**問題:** 時刻 $t$ がおおきくなるに従って、個体数（密度分布）$u(x,t)$ はどういう分布にちかづくのだろうか?定常的なパターンに落ち着くか？$a(x)$ が環境因子としての効果をもつ？
** 「**数学実験 3**」

その他にも, 食う-食われるの関係や競合関係にある２種や３種の個体の相互作用のもとでの個体増殖モデルの安定パターンの存在とそのパターン形成のしくみの解明は現在なお研究されつつあるテーマである.

### 3.2 例 2:パターン形成と反応-拡散方程式

参考図書:「非線型の現象と解析」(山口昌哉編著、日本評論社)

動物の表皮や植物のパターン形成の数理モデルを通しての解明で, 特に反応ー拡散 (微分) 方程式の解析を行なうという視点がある. しまうまの縞、ひょうの斑点模様、魚の縞模様など、自然に見られる安定パターンがなぜ存在するのか?てっとりばやくいえば, 縞模様の黒の色素の密度を表わす $u(x,t)$ の時間 $t$ と空間場所 $x$ の関数の変化を解析し, 対応する数理モデルの**定常かつ安定なパターン**として $u(x)$ (時間に依らないパターン) の形状を解析し, $u(x)$ がおおきい場所では黒く, 小さい場所では白いとして縞模様パターンがでてくるかどうかを解析するわけである. 時間変化のもとでのパターンの変化自体に興味深い現象があらわれることもあるが、ある場合時間が十分にたつと時間によらない定常パターンにちかづいていく, という場合があって, 特に安定な定常パターンがある場合そのパターンに漸近する挙動をし, 我々はその漸近的にちかづいてほぼ時間変動のないような定常安定パターンに近いパターンを現実には見ているのだと, 動物などの安定パターンの形成の数理的解釈ができるというわけである.

### 3.3 例 3:超伝導現象と Ginzburg-Landau 方程式

### 3.4 例 4:相分離モデル、遺伝子モデルと Allen-Cahn 方程式

### 3.5 例 5:非線形光学における電磁波伝達と非線形 Schrödinger 方程式